

# 순환 Hadamard 행렬을 이용한 선택 사상기법의 성능분석

\*임대운, \*임치우, \*노종선  
\*서울대학교 전기컴퓨터공학부

dwlim@ccl.snu.ac.kr, ichiwoo@ccl.snu.ac.kr, jsno@snu.ac.kr

## Performance Analysis of Selected Mapping using Cyclic Hadamard Matrix

\*Dae-Woon Lim, \*Chi-Woo Lim, \*Jong-Seon No  
\*Seoul National University

### 요약

OFDM 시스템의 PAPR 을 효과적으로 줄이기 위한 선택 사상 기법에 있어서 위상 시퀀스로 불규칙 시퀀스를 사용하였을 때 가장 좋은 성능을 나타낸다고 알려져 있다. 본 논문에서는 의사 불규칙한 특징을 갖는 m-시퀀스를 순환 이동하여 생성한 순환 Hadamard 행렬의 각 행들을 선택 사상 기법의 위상 시퀀스들로 제안하였다. 모의 실험 결과 제안된 위상 시퀀스를 사용하였을 경우, 불규칙 위상 시퀀스와 동일한 PAPR 감소 성능을 나타내었다.

### I. 서론

최근 고속 데이터 통신의 필요성이 강조되면서 다중 반송파 방식인 OFDM(Orthogonal Frequency Division Multiplexing) 시스템이 많은 관심을 받고 있다. OFDM 시스템은 다수의 부 반송파를 이용하여 신호를 전송한다. 이 시스템은 각 서브채널을 평탄한 페이딩 채널로 만들어 주파수 선택적 페이딩 환경에서 좋은 성능을 나타내며, 보호구간(Guard Interval)을 사용하여 인접 심볼간의 간섭(Inter Symbol Interference)을 제거한다.

OFDM 시스템의 큰 단점은 높은 PAPR(Peak-to-Average Power Ratio)을 가진다는 것인데 이는 증폭기(High Power Amplifier)에서 비선형 왜곡을 일으키고 BER(Bit Error Ratio)을 감소 시킨다. 비선형 왜곡을 줄이기 위하여 BO(Back off)가 큰 증폭기를 사용해야 하는데 이 증폭기는 구현이 어려우며 매우 고가이다.

PAPR 문제를 해결하기 위한 여러 방법은 블록부호(Block Coding)기법, 클리핑(Clipping)기법, 스크램블링(Scrambling)기법 등으로 나눌 수 있다. 스크램블링기법은 적은 부가정보를 사용하여, OFDM 신호를 왜곡하지 않고 좋은 PAPR 감소 효과를 나타낸다. 스크램블링기법 중 가장 대표적인 방법은 PTS(Partial Transmit Sequence)와 선택사상기법(SLM : Selected Mapping)이며, 이 중 선택사상기법은 같은 양의 부가 정보에 대해서 PTS 보다

더 효과적으로 PAPR 을 감소시킨다. OFDM 시스템에서 선택사상기법을 이용하여 PAPR 을 감소시키는 경우, 모의 실험을 통하여 위상 시퀀스로 불규칙 시퀀스가 가장 좋은 성능을 보여주는 것으로 알려져 있다. 본 논문에서는 유사 불규칙한 특징을 갖는 m-시퀀스를 순환 이동하여 생성한 순환 Hadamard 행렬의 각 행을 선택사상 기법의 위상 시퀀스로 제안 하고, OFDM 시스템의 모의 실험 결과를 통하여 제안된 시퀀스가 불규칙 시퀀스와 동일한 PAPR 감소 성능을 나타냄을 보일 것이다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 OFDM 의 기본적인 모델과 선택사상기법에 대한 소개를 하고, III장에서는 순환 Hadamard 시퀀스의 정의와 생성방법에 대해 설명한다. IV장에서는 III장에서 제시한 위상 시퀀스를 이용한 모의실험 결과를 보이고, V장에서는 결론을 내린다.

### II. OFDM 시스템 모델과 PAPR 감소기법

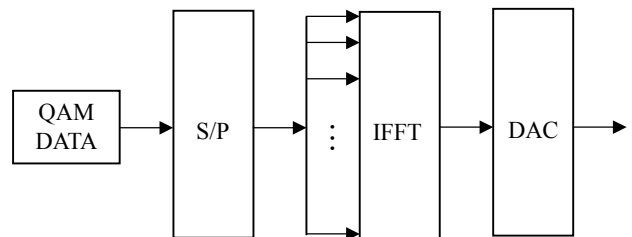


그림 1. OFDM 송신기 구조

OFDM 시스템의 기본 원리는 사용하는 주파수 대역을 다수의 서브 채널로 나눈 후 각 서브 채널에 병렬로 데이터를 실어서 전송하는 것이다. 이 방법은 페이딩 환경에서 인접한 비트가 완전히 손실되는 것을 방지하는 대신, 페이딩에 대한 영향을 전체 비트들이 조금씩 나누어 가짐으로써 페이딩 환경에서 싱글캐리어 변조방식보다 좋은 성능을 나타낸다. 또한 각 서브 채널의 부반송파들이 직교 함으로써 주파수 효율을 최대화 할 수 있는 장점도 가진다.

OFDM 시스템의 송신 신호는 각 서브 채널 신호의 합으로 이루어지는데, 싱글 캐리어 변조방식에 비해 최대  $N$ 배까지 큰 최대 순시과위가 생길 수 있고 이는 송신 증폭기의 비선형적인 동작[3]을 발생시킨다.

PAPR 문제를 해결하기 위해 블록부호기법, 클리핑기법, 스크램블링기법등이 연구 되었다. 블록부호기법은 작은 PAPR 을 가지는 부호어(Code Word)로 입력 데이터를 부호화하는 방법이고, 클리핑기법은 증폭기의 입력 전에 미리 설정한 임계값으로 최대출력을 제한하여 PAPR 을 줄이는 방법이다.

스크램블링기법에는 PTS 기법과 선택사상기법이 있는데 PTS 기법은 입력 데이터를 여러 개의 겹치지 않는 블록으로 나누고 각 블록의 위상을 최적화 하여 합쳐진 신호가 작은 PAPR 을 갖도록 한다. 선택사상기법[1]은 입력 심볼을  $U$ 개의 위상 시퀀스와 곱하여 각각 IFFT 한 후, 이 중 가장 낮은 PAPR 을 갖는 OFDM 신호를 선택하여 전송한다. 클리핑기법은 OFDM 신호에 왜곡을 가함으로 BER 성능이 나빠지고, 블록부호기법의 경우는 신호에 왜곡을 가하지 않고 PAPR 을 일정값 이하로 보장하지만 데이터 전송효율(Coding Rate)이 저하된다는 단점을 가지고 있다.

클리핑기법과 블록부호기법에 비해 스크램블링기법은 BER 성능과 전송효율 측면에서 효과적이다. 스크램블링기법 중에서도 선택사상기법기법이 같은 부가정보량으로 비교하면 PTS 기법보다 더 좋은 PAPR 감소 성능을 나타낸다.

선택사상기법을 좀더 자세히 살펴보면, 선택사상기법은  $U$  개의 동일한 정보를 표현하면서 통계적으로 서로 독립인 OFDM 신호  $a^{(u)}$ , ( $1 \leq u \leq U$ )를 생성한 후  $U$  개의 신호 중에서 가장 작은 PAPR 을 갖는 신호를 송신 신호로 선택한다. 이를 식 (1)과 같이 표현할 수 있다.

$$\tilde{u} = \arg \min \left( \max_{0 \leq \rho \leq B} |a_{\rho}^{(u)}| \right) \quad (1)$$

$\arg \min()$ 은 괄호 속이 전역 최소를 달성하는 값이고, 이때 전송되는 신호는  $\tilde{a} = a^{(u)}$ 로 표현한다.

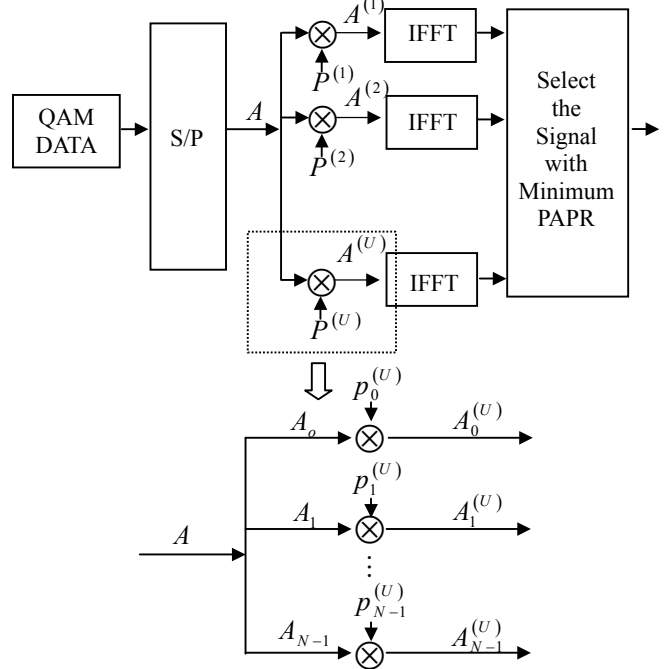


그림 2. OFDM 시스템의 선택사상기법 송신기 블록도

같은 정보를 가지면서 PAPR 이 다른  $U$  개의 서로 다른 OFDM 심볼 생성방법은 다음과 같다.

우선  $p_v^{(u)} = e^{j\phi_v^{(u)}}$ ,  $\phi_v^{(u)} \in [0, 2\pi]$ ,  $0 \leq v \leq N-1$ ,  $1 \leq u \leq U$  인  $U$ 개의 벡터  $P_v^{(u)} = [p_0^{(u)}, p_1^{(u)}, \dots, p_{N-1}^{(u)}]$ 를 정의한다. 하나의 OFDM 심볼 입력은  $U$  개의 벡터  $P^{(u)}$ 와 곱해지고  $U$  개의 서로 다른 OFDM 심볼  $A^{(u)}$ 를 만든다.

$$A^{(u)} = A \cdot P^{(u)}, 1 \leq u \leq U \quad (2)$$

$U$ 개의 OFDM 심볼  $A^{(u)}$ 로부터, IFFT 변환에 의해 서로 다른 OFDM 신호  $a^{(u)}$ 를 만들고, 이 중에서 가장 작은 PAPR 을 가진 OFDM 신호  $\tilde{a}$ 를 선택하여 전송한다.

이때 곱해지는  $P^{(u)}$ 들을 위상 시퀀스라 부른다. 선택사상기법에서 위상 시퀀스의 가지수  $U$ 가 커지면 PAPR도 함께 감소하지만,  $U$ 의 증가 정도에 비해 감소 정도는 점점 줄어들는다. 하지만 송수신기의 복잡도와 부가정보는  $U$ 에 비례하여 증가하게 됨으로  $U$ 를 적절하게 선택하는 것이 중요하며, 어떤 기준을 가지고 위상 시퀀스를 선택하는냐도 매우 중요한 문제이다.

### III. 위상 시퀀스

선택사상기법에서 통계적으로 서로 독립인 OFDM 신호를 생성하기 위해서 위상 시퀀스들은 서로 직교해야 한다고 알려져 있다. Sylvester Hadamard 행렬의 각 행을 선택 사상기법의 위상 시퀀스들로 사용할 경우 각 위상 시퀀스들은 직교성을 만족하지만, 불규칙 위상 시퀀스들에 비해 PAPR을 감소하는 성능이 현저히 떨어짐을 모의 실험을 통하여 알 수 있다.

이 모의 실험으로부터 선택 사상기법에서 위상 시퀀스가 최적의 성능을 갖기 위해서는 직교성 이외에 다른 조건을 만족하여야 한다는 것을 유추할 수 있다. 하지만 선택 사상기법에서 위상 시퀀스들이 가져야 할 다른 조건에 대해서는 발표된 연구 결과는 아직 없다.

지금까지의 모의실험을 통하여 선택사상기법에서 불규칙 시퀀스를 사용하였을 경우 OFDM의 PAPR 성능이 가장 좋았다는 결과[2]로부터, 유사 불규칙한 특성을 갖는 m-시퀀스를 순환 이동하여 생성한 순환 Hadamard 행렬의 각 행을 선택사상기법의 위상 시퀀스로 사용하는 방안을 생각해 볼 수 있다. 다음은 순환 Hadamard 행렬 정의와 생성 방법을 소개한다.

정의 1.

크기가  $n$  인 Hadamard 행렬  $H_n$  은  $+1$ 과  $-1$ 을 행렬의 원소로 가지면서  $H_n \cdot H_n^T = nI_n$  을 만족하는  $n \times n$  정방행렬이다. 여기서  $I_n$  은 크기가  $n$  인 항등 행렬이다.

정의 2.

순환 Hadamard 행렬은 행렬에서 첫 행과 첫 열을 제외하고, 나머지  $(n-1) \times (n-1)$  행렬의 행들이 서로 순환이동으로 얻어지는 행렬이다.

크기가  $n$  인 순환 Hadamard 행렬의 구조적인 생성은 다음의 세가지 경우에 가능하다.

1.  $n-1$  이 3 (modulo 4) 인 소수일 때.
2.  $n-1$  이 쌍소수의 곱으로 표현될 때.
3.  $n$  이 2의 승으로 표현될 때.

각각의 경우에 해당되는 생성 방법이 알려져 있는데 이

논문에서는 순환 Hadamard의 첫 행과 열을 1로 하고, 나머지  $(n-1) \times (n-1)$  행렬은 길이가  $(n-1)$  인 m-시퀀스를 순환 이동하여 생성 하였다.

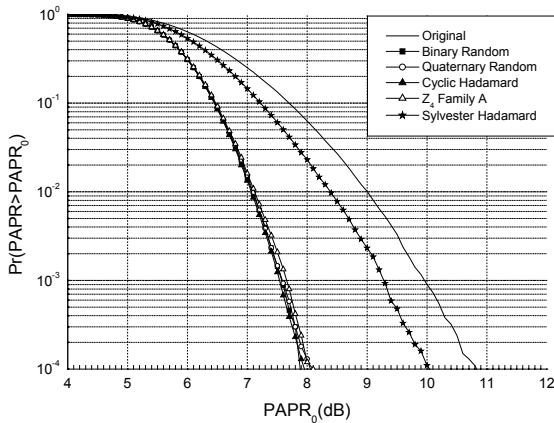
m-시퀀스는 이동 레지스터(Shift Register)를 사용하여 생성하며, m-시퀀스를 순환 이동하면 m-시퀀스가 된다. m-시퀀스는 유사 불규칙한 성질을 가지고 있고 이상적인 자기상관 값을 가지고 있으므로, m-시퀀스를 순환 이동한 후 맨 앞에 1을 추가하여 만든 순환 Hadamard 행렬의  $(n-1)$  개의 행들은 서로 직교성을 만족한다. 또한 m-시퀀스는 균형(Balance)성을 가지고 있으므로 모든 원소의 값이 1인 첫번째 행과도 직교한다.

$n \times n$  순환 Hadamard 행렬에서  $U$  개의 행을 선택할 때 항상 모든 원소의 값이 1인 첫번째 행을 선택하고 나머지  $(U-1)$  개는  $(n-1)$  개의 행 중에서 선택한다. 모의 실험 결과  $(U-1)$  개의 선택 방법에 따라서는 성능의 차이가 나타나지 않았다.

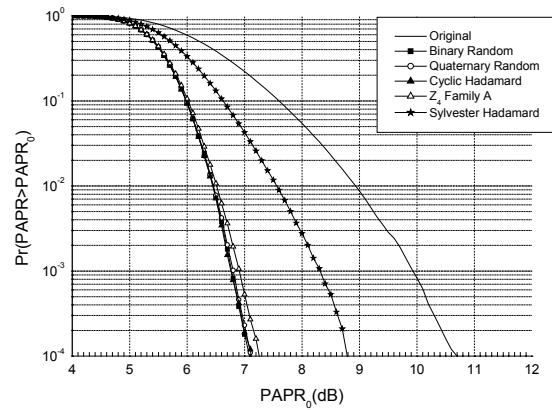
### IV. 모의 실험 결과

모의 실험은 IEEE 802.11a W-LAN Modem 규격에서, FFT 크기가 64 경우와 IEEE 802.16e Mobile W-MAN OFDM 규격에서 FFT 크기가 256 에 대하여 수행하였다. 각각의 경우 변조방식은 16QAM 으로 하였고, 위상 시퀀스의 가지 수  $U$ 는 4 와 8 로 하였다. OFDM 입력 데이터는 불규칙한 방법으로 100,000 개를 생성하였다.

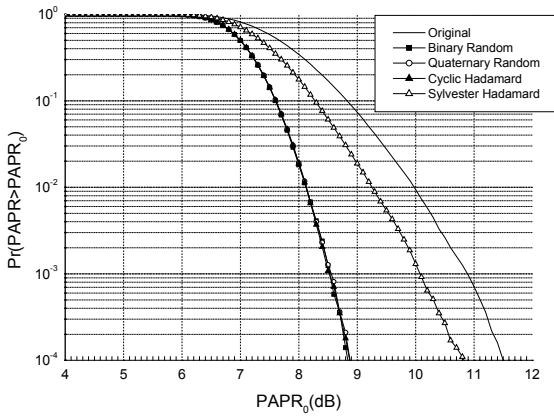
그림 3을 보면,  $+1, -1$  로 이루어진 이진 불규칙 시퀀스와  $+1, -1, +j, -j$  로 이루어진 불규칙 시퀀스는 성능의 차이가 없음을 알 수 있다. 순환 Hadamard 행렬의 각 행들을 선택사상기법의 위상 시퀀스를 사용하였을 경우 불규칙 위상 시퀀스와 동일한 성능을 보이고, Sylvester Hadamard 행렬의 각 행들을 위상 시퀀스로 사용했을 경우에는 성능이 좋지 않음을 볼 수 있다. 그림 3의 (a)와 (b)에서 위상 시퀀스로  $Z_4$  시퀀스를 사용한 경우에도 불규칙 위상 시퀀스와 유사한 성능을 나타냄을 볼 수 있다. 불규칙 위상시퀀스를 사용한 선택사상기법은 FFT 길이가 64 와 256 일때, 위상시퀀스를 4 가지로 사용한 경우  $10^{-4}$  에서 PAPR을 약 2.5dB 감소시키고, 8 가지로 사용한 경우에는 PAPR을 약 3.5dB 감소시킴을 볼 수 있다.



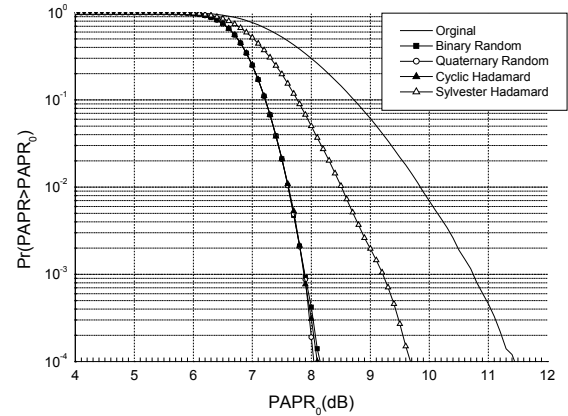
(a)  $N_{FFT} = 64, U = 4$



(b)  $N_{FFT} = 64, U = 8$



(c)  $N_{FFT} = 256, U = 4$



(d)  $N_{FFT} = 256, U = 8$

그림 3. 선택적사상기법에서 위상 시퀀스에 따른 OFDM 시스템의 PAPR 확률분포

#### IV. 결론

본 논문에서는 의사 불규칙 특성을 갖는 m-시퀀스의 순환 이동으로 생성한 순환 Hadamard 행렬의 각 행들을 OFDM 시스템의 PAPR 을 줄이기 위한 선택 사상 기법의 위상 시퀀스로 사용하고 모의 실험을 통하여 PAPR 감소 성능이 가장 좋다고 알려진 불규칙 위상 시퀀스를 사용한 경우와 동일한 성능을 나타냄을 보였다. 불규칙 특성을 갖는 위상 시퀀스가 최대의 PAPR 감소 성능을 보이는 것에 대한 이론적인 연구를 향후 진행할 것이다.

#### 참고문헌

[1] Stefan H.Muller, Robert W.Bauml, Rebert

F.H.Fischer, and Johannes B.Huber, " OFDM with Reduced Peak-to-Average Power Ratio by Multiple Signal Representation" , *In Annals of Telecomm.*, vol 52, n.1-2, pp.58-67, February 1997,

[2] Naoto Ohkubo and Tomoaki Ohtsuki , " A Peak to Average Power Ratio Reduction of Multimedia CDMA Using Selective Mapping" , *IEEE VTC 2002 Fall*

[3] Christoph Rapp, " Effects of HPA-Nonlinearity on A 4-DPSK/OFDM-Signal for A Digital Sound Broadcasting System" , *2nd European Conference on Satellite Communication*, October 1991