

가변적 구역을 갖는 새로운 낮은 상관 구역 수열의 생성

*김 영 식, *노 종 선, **정 하 봉
*서울대학교 전기컴퓨터공학부
**홍익대학교 전자전기공학부

New Construction of Low Correlation Zone Sequences
With Flexible Zone

*Young-Sik Kim, *Jong-Seon No, and **Habong Chung
*School of Electrical Engineering and Computer Science, Seoul National University
**School of Electronics and Electrical Engineering, Hongik University

요 약

본 논문에서는 파라미터 $(2^{n+2}-2, M, L, 2)$ 를 갖는 이진 낮은 상관 구역 (LCZ) 수열의 새로운 설계 기법을 제시한다. 여기에서 제시하는 새로운 방법에서는 낮은 상관 구역 L 과 그에 따른 집합의 크기 M 을 가변적으로 선택할 수 있다. 이러한 가변성은 기존의 수열군들에 비해서 수열 집합을 설계하는데 있어서 커다란 자유를 제공해 줄 수 있다.

1. 서 론

부호 분할 다중 접속(code division multiple access system)에서는 많은 사용자들이 Gold 수열군과 같은 좋은 상관 특성을 갖는 의사 불규칙 수열을 사용해서 무선 자원을 공유할 수 있다. Gold 수열 집합은 주어진 집합의 크기와 주기에 대해서 최대의 상관 값이 이론적인 하한을 [6] 만족한다는 의미에서 최적인 수열 집합이다. 이 하한은 대략적으로 수열의 주기의 두 배의 제곱근 정도의 크기를 갖는다. 그러므로 수열 군이 최적이라고 하더라도 자기상관 값과 상호상관 값은 상대적으로 큰 값을 갖게 된다. 따라서 최적의 수열 군을 사용하는 경우에도 상당한 양의 다중 접속 간섭이(multiple access interference) 발생할 수가 있다.

Gaudenzi, Elia, 그리고 Vilola는 [1] 준-동기 부호 분할 다중 접속(quasi-synchronous code division multiple access; QS-CDMA) 시스템을 제시하였다. 이 시스템에서 서로 다른 사용자간의 수 칩 이내의 시간 지연이 허용되고 이것은 무선 통신 시스템을 설계할 때 더 큰 유연성을 제공해 줄 수 있다. QS-CDMA 시스템을 위한 수열 집합을 설계할 때 가장 중요한 것은 전체적인 최대의 자명하지 않은 상관 값들을 최소화하는 것이 아니라 원점 근처에서 낮은 상관 구역을(low correlation zone; LCZ) 갖는 것이다 [7].

S 가 주기가 N 인 M 개의 수열들의 집합이라 하자. 만일 S 에서의 임의의 두 개의 수열간의 상관 함수의 크기가 구간 $-L < \tau < L$ 에서 ϵ 보다 작거나 같은 값들을 갖는다면 S 는 (N, M, L, ϵ) LCZ 수열 집합이라 부른다. Long, Zhang, 그리고 Hu는 [7] Gordon-Mills-Welch (GMW) 수

열을 [9] 사용해서 이진 LCZ 수열 집합을 제안하였다. 또한 Kim, Jang, No, 그리고 Chung은 [5] 최적의 4진 LCZ 수열 집합을 제안하였다. 그리고 Jang, No, Chung, 그리고 Tang은 [3] 새로운 최적의 p 진 LCZ 수열 집합을 생성하였다. Jang, No, 그리고 Chung은 [4] unified 수열을 [8] 사용해서 최적인 p^2 진 LCZ 수열 집합을 생성하는 새로운 방법을 제안하기도 하였다.

한편 Ding, Helleseth, 그리고 Martinsen은 [2] 차수가 4인 원분수(cyclotomic number)를 사용하여 최적의 three-level 자기상관 값을 갖는 이진 수열의 새로운 군을 제안하였다. 이 논문에서는 [2]에서 사용한 interleaving 방법을 응용해서 짝수 주기를 갖는 새로운 LCZ 수열 집합을 생성하는 방법을 제시한다.

본 논문에서는 파라미터 $(2^{n+2}-2, M, L, 2)$ 를 갖는 이진 LCZ 수열의 새로운 설계 기법을 제시한다. 여기에서 제시하는 새로운 방법에서는 낮은 상관 구역 L 과 그에 따른 집합의 크기 M 을 가변적으로 선택할 수 있다. 이러한 가변성은 기존의 수열군들에 비해서 수열 집합을 설계하는데 있어서 커다란 자유를 제공해 줄 수 있다.

2. 새로운 수열 집합의 설계

$N=2^{n+1}-2$ 라 하자. Z_N 은 modulo N 인 정수의 집합이라 하자. 즉, $Z_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ 이다. $a(t)$ 가 최적의 자기상관 특성을 갖는 주기가 2^n-1 인 이진 수열이라 하자. 이제 D_u 를 $a(t-u)$ 의 characteristic 집합이라 하자. 즉

$$D_u = \{t \mid a(t-u) = 1, 0 \leq t \leq 2^n - 2\} = D_0 + u$$

여기서 $u \in Z_{2^n-1}$, $D_0 + u = \{d+u \mid d \in D_0\}$, 그리고 “+”는 modulo $2^n - 1$ 덧셈이라 하자. $a(t)$ 의 balance 성질로부터 다음식이 성립한다.

$$|D_u| = 2^{n-1}.$$

$a(t)$ 의 difference-balance 성질로부터, $u \neq v$ 일 때, 다음 식이 성립한다.

$$|D_u \cap D_v| = 2^{n-2}. \quad (1)$$

중국인의 나머지 정리로부터 동형사상 $\phi : w \mapsto (w \bmod 2, w \bmod 2^n - 1)$ 에 대해서 $Z_N \cong Z_2 \otimes Z_{2^n-1}$ 가 성립한다. 논문에서는 $w \in Z_N$ 과 $(w \bmod 2, w \bmod 2^n - 1)$ 를 함께 사용할 것이다.

$u \in Z_{2^n-1}$ 에 대해서 C_u 가 다음과 같은 Z_N 의 부분집합이라 하자.

$$C_u \cong \{0\} \otimes D_u \cup \{1\} \otimes D_{1-u}. \quad (2)$$

그러면 다음 식이 성립한다.

$$|C_u| = |D_u| + |D_{1-u}| = 2^n. \quad (3)$$

$s_u(t)$ 가 C_u 의 characteristic 수열이라 하자. 즉

$$s_u(t) = \begin{cases} 1, & t \in C_u \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

주기가 N 인 이진 수열 $s_u(t)$ 와 $s_v(t)$ 의 상관 함수 $R_{u,v}(\tau)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$R_{u,v}(\tau) = \sum_{t=0}^{N-1} (-1)^{s_u(t) + s_v(t+\tau)}.$$

이제 $d_{u,v}(\tau) = |C_u \cap (C_v + \tau)|$ 라 하자 여기서 $\tau \in Z_N$, $C_v + \tau = \{c + \tau \mid c \in C_v\}$, 그리고 “+”는 modulo N 덧셈을 의미한다. 그러면 우리는 다음의 보조 정리를 쉽게 얻을 수 있다.

보조정리 1. 상관 함수 $R_{u,v}(\tau)$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$R_{u,v}(\tau) = N - 2(|C_u| + |C_v| - 2d_{u,v}(\tau)).$$

□

이제 다음과 같이 수열의 집합을 정의할 수 있다.

정의 2. U 를 C_u 의 모든 characteristic 수열 $s_u(t)$ ($1 \leq u < 2^{n-1}$)의 모음이라 정의하자.

□

다음의 정리는 정의 2에서의 수열들의 상관 값들을 보여준다.

정리 3. U 에 있는 두 개의 수열 $s_u(t)$ 와 $s_v(t)$ 의 상관 함수는 다음과 같다.

i) $u \neq v$;

$$R_{u,v}(\tau) = \begin{cases} 2^n - 2, & \text{for } \tau = (0, u-v), (0, v-u), \\ & (1, u+v-1), (1, 1-u-v) \\ -2, & \text{otherwise} \end{cases}$$

ii) $u = v$;

$$R_{u,v}(\tau) = \begin{cases} 2^{n+1} - 2, & \text{for } \tau = 0 \\ 2^n - 2, & \text{for } \tau = (1, 2u-1), (1, 1-2u) \\ -2, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

증명) $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in Z_2 \otimes Z_{2^n-1}$ 라 하자. 정의 2로부터 $u+v \neq 1 \bmod 2^n - 1$ 임은 분명하다. 그러면 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} d_{u,v}(\tau) &= |C_u \cap (C_v + \tau)| \quad (4) \\ &= |\{0\} \cap \{\tau_1\}| |D_u \cap (D_v + \tau_2)| \\ &\quad + |\{0\} \cap \{1+\tau_1\}| |D_u \cap (D_{1-v} + \tau_2)| \\ &\quad + |\{1\} \cap \{\tau_1\}| |D_{1-u} \cap (D_v + \tau_2)| \\ &\quad + |\{1\} \cap \{1+\tau_1\}| |D_{1-u} \cap (D_{1-u} + \tau_2)| \\ &= \begin{cases} |D_u \cap (D_v + \tau_2)| \\ \quad + |D_{1-u} \cap (D_{1-u} + \tau_2)| & \text{for } \tau_1 = 0 \\ |D_u \cap (D_{1-v} + \tau_2)| \\ \quad + |D_{1-u} \cap (D_v + \tau_2)| & \text{for } \tau_1 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

i) $u \neq v$;

(4)로부터 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} d_{u,v}(\tau) &= \begin{cases} |D_u| + |D_{1-u} \cap D_{u-2v+1}|, & \text{for } \tau = (0, u-v) \\ |D_u \cap D_{2v-u}| + |D_{1-v}|, & \text{for } \tau = (0, v-u) \\ |D_u \cap (D_v + \tau_2)| + & \text{for } \tau = (0, \tau_2), \\ |D_{1-u} \cap (D_{1-v} + \tau_2)| & \tau_2 \neq \pm(u-v) \\ |D_u| + |D_{1-u} \cap D_{u+2v-1}|, & \text{for } \tau = (1, u+v-1) \\ |D_u \cap D_{2-u-2v}| + |D_{1-u}|, & \text{for } \tau = (1, 1-u-v) \\ |D_u \cap (D_{1-v} + \tau_2)| + & \text{for } \tau = (1, \tau_2), \\ |D_{1-u} \cap (D_v + \tau_2)| & \tau_2 \neq \pm(u+v-1). \end{cases} \end{aligned}$$

(5)

(1)과 (2)를 (5)에 적용시키면 다음이 성립한다.

$$d_{u,v}(\tau) = \begin{cases} 2^{n-1} + 2^{n-2}, & \text{for } \tau = (0, u-v), (0, v-u), \\ & (1, u+v-1), (1, 1-u-v) \\ 2^{n-1}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

보조정리 1과 (3)으로부터 다음이 성립한다.

$$R_{u,v}(\tau) = \begin{cases} 2^n - 2, & \text{for } \tau = (0, u-v), (0, v-u), \\ & (1, u+v-1), (1, 1-u-v) \\ -2, & \text{otherwise} \end{cases}$$

ii) $u = v$;

이것은 U 에 속한 수열들 사이의 자기상관 특성에 해당한다. 이 경우 (4)로부터 다음이 성립한다.

$$d_{u,u}(\tau) = \begin{cases} |D_u \cap (D_u + \tau_2)| + |D_{1-u} \cap (D_{1-u} + \tau_2)|, & \text{for } \tau_1 = 0 \\ |D_u \cap (D_{1-u} + \tau_2)| + |D_{1-u} \cap (D_u + \tau_2)|, & \text{for } \tau_1 = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2^n, & \text{for } \tau = 0 \\ 2^{n-1} + 2^{n-2}, & \text{for } \tau = (1, 2u-1), (1, 1-2u) \\ 2^{n-1}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

이것으로부터 다음이 성립한다.

$$R_{u,r}(\tau) = \begin{cases} 2^{n+1} - 2, & \text{for } \tau = 0 \\ 2^n - 2, & \text{for } \tau = (1, 2u-1), (1, 1-2u) \\ -2, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

다음 예는 구체적인 생성 과정을 보여주고 있다.

예 4. $p = 2$ 이고 $n = 4$ 일 때 주기가 15인 m -수열은 다음과 같이 주어진다.

$$000100110101111.$$

이 m -수열의 characteristic 집합은 다음과 같다.

$$D_0 = \{3, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14\}.$$

$u = 6$ 에 대해서 다음을 얻을 수 있다.

$$D_6 = \{0, 2, 3, 4, 5, 9, 12, 13\}$$

그리고

$$D_{-5} = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 13\}.$$

그래서 다음과 같은 characteristic 집합을 생각하자.

$$C_6 = \{0\} \otimes D_6 \cup \{1\} \otimes D_{-5} \\ = \{0, 1, 2, 4, 7, 9, 12, 13, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 28\}$$

위의 characteristic 집합을 갖는 U 에서의 수열 $s_6(t)$ 는 아래와 같다.

$$s_6(t) = 111010010100110001111101100010.$$

마찬가지로 $v = 3$ 에 대해서 U 에서의 수열 $s_3(t)$ 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$s_3(t) = 111001110111101010010000110100.$$

그리고 $v = 4$ 에 대해서 U 에서의 수열 $s_4(t)$ 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$s_4(t) = 101100000111000110110111011010.$$

$s_6(t)$ 와 $s_3(t)$ 사이의 상호상관 값은 다음과 같다.

$$R_{6,3}(\tau) = \begin{matrix} -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, 14, -2, \\ -2, -2, -2, 14, -2, -2, -2, -2, -2, 14, -2, \\ -2, -2, -2, 14, -2, -2, -2, -2, -2, -2. \end{matrix}$$

이 경우에 LCZ는 7이고 $\epsilon = 2$ 이다. 마찬가지로 $s_6(t)$ 와 $s_3(t)$ 사이의 상호상관 값들을 다음과 같이 열거할 수

있다.

$$R_{6,4}(\tau) = \begin{matrix} -2, -2, 14, -2, -2, -2, -2, -2, -2, 14, \\ -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, \\ 14, -2, -2, -2, -2, -2, -2, 14, -2. \end{matrix}$$

이 경우 LCZ는 2이고 $\epsilon = 2$ 이다. □

예에서 볼 수 있는 것처럼 U 속에 있는 수열들 사이에는 다양한 LCZ를 갖는 상호상관 값들이 존재한다. 다음 장에서 U 에서 적당한 수열을 선택해서 LCZ 수열 집합을 설계할 것이다.

3. 이진 LCZ 수열 집합의 생성

이 장에서는 U 에 있는 이진 수열들로부터 LCZ 수열 집합을 구성하는 방법을 제시할 것이다. □

정리 5. [Tang, Fan, and Matsufuji [10]] S 가 파라미터 (N, M, L, ϵ) 을 갖는 LCZ 수열 집합이라 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$ML - 1 \leq \frac{N-1}{1 - \epsilon^2/N}. \tag{6}$$

이 경우 $\epsilon = 2$ 이기 때문에 (6)은 다음과 같이 바꿀 수 있다.

$$ML \leq N + 4 + \frac{12}{N-4}$$

그리고 $n \geq 4$ 인 경우 다음이 성립한다.

$$M \leq \lfloor \frac{N+4}{L} \rfloor \tag{7}$$

여기서 $\lfloor x \rfloor$ 은 x 보다 작거나 같은 최대의 정수를 의미한다. $(N, M, L, 2)$ LCZ 수열 집합이 (7) 부등식에서 등식을 만족시킬 때 최적이라 부른다.

앞에서 sidelobe의 위치가 원점을 중심으로 대칭이었다. 그래서 원점에서 sidelobe까지의 거리를 기준으로 볼 때 두 개의 서로 다른 거리가 존재한다. $L_{u,r}$ 가 $R_{u,r}(\tau)$ 에서 원점으로부터 가장 가까운 sidelobe까지의 거리를 나타낸다고 하자. 그러면 $L_{u,r}$ 는 다음 보조정리에 의해서 결정될 수 있다.

보조정리 6. $1 \leq v \leq u < 2^{n-1}$ 인 $s_u(t), s(v) \in U$ 에 대해서, $L_{u,r}$ 는 다음과 같이 주어진다. (8)

$$L_{u,r} = \begin{cases} \frac{N}{2} - u - v + 1, & \text{if } u - v \text{ is odd} \\ u - v & \text{if } u - v \text{ is even and } u \neq v \\ 2u - 1 & \text{if } u = v. \end{cases}$$

증명) 0부터 $(0, u-v)$ 까지의 거리 d_1 가 다음과 같다는 것은 쉽게 보일 수 있다.

$$d_1 = \begin{cases} u-v, & \text{if } u-v \text{ is even} \\ \frac{N}{2} - (u-v), & \text{if } u-v \text{ is odd.} \end{cases}$$

마찬가지로 0부터 $(1, u+v-1)$ 까지의 거리는

$$d_2 = \begin{cases} u+v-1, & \text{if } u-v \text{ is even} \\ \frac{N}{2} - (u+v-1), & \text{if } u-v \text{ is odd.} \end{cases}$$

그래서 d_1, d_2 , 그리고 $2u-1$ 중 최소값인 $L_{u,v}$ 는 (8)에서처럼 쉽게 유도될 수 있다. □

보조정리 6은 U 에서 선택된 수열 $s_u(t)$ 의 집합의 LCZ가 u 의 index에만 의존한다는 것을 말해준다. 그래서 우리가 이제 할 일은 index 집합 $I \subset \{1, 2, \dots, 2^{n-1}-1\}$ 를 선택한 후에 수열의 집합 $W_I = \{s_u(t) \in U\}$ 를 선택해서 좋은 LCZ 수열 집합을 만드는 것이다.

보조정리 6은 집합 W_I 의 LCZ는 다음과 같은 세 개의 값 중 최소값과 같다는 것을 보여준다. $|u-v|$ 가 홀수이면 $2^n - (u+v)$, $|u-v|$ 가 0이 아닌 짝수이면, $|u-v|$, 그리고 $u=v$ 이면 $2u-1$ 이다. 여기서 u 와 v 는 I 상의 모든 원소들이다. 그래서 주어진 파라미터 L 을 유지하기 위해서 집합 W_I 의 LCZ는

- 1) I 에서의 index들은 $\frac{L+1}{2}$ 보다 크거나 같아야 한다.
- 2) 두 개의 index들의 합은 그 차가 짝수가 아니라면 $2^n - L$ 보다 작거나 같아야 한다.
- 3) index들의 차이는 L 보다 작은 짝수여서는 안 된다.

동시에 주어진 L 에 대해서 우리는 가능한 I 의 크기를 크게 만들어야 한다. 이러한 제약조건들로부터 우리는 매우 복잡한 최적화 문제를 만들 수 있다. 이 문제에 대한 정확한 해를 구하는 과정은 복잡할 것으로 보이지만 앞서 이야기한 제약조건들로부터 우리는 공차가 홀수인 하나의 등차수열을 이끌어 낼 수가 있다.

생성법. 홀수인 정수 f 와 음이 아닌 정수 $f_0 < f$ 를 선택하자. 그런 후에 우리는 다음과 같이 index 집합을 만들 수 있다.

$$I = \{f_0 + mf : m = 1, 2, \dots, \lfloor (2^{n-1} - f_0)/f \rfloor\}.$$

□

그러면 생성법에서의 집합의 크기 M 과 W_I 의 LCZ L 이 다음의 정리에서처럼 주어진다.

정리 7. q 와 r 이 각각 2^{n-1} 을 f 로 나눴을 때의 몫과 나머지라 하자. 즉 $2^{n-1} = qf + r$ 이다. 그러면 생성법에서의 W_I 는 파라미터 $(2^{n+1} - 2, M, L, 2)$ 를 갖는 이진 LCZ 수열이 된다. 여기서 M 과 L 은 다음과 같이 주어진다.

$$M = q$$

그리고 만일 $f_0 = 0$ 이면,

$$L = \begin{cases} f+2r, & \text{for } f \geq 2r+1 \\ 2f-1, & \text{for } f < 2r+1 \end{cases} \quad (9)$$

그리고 만일 $f_0 \neq 0$ 이면,

$$L = \begin{cases} f+2r-2f_0, & \text{for } f \geq 2r-2f_0 \\ 2f, & \text{for } f < 2r-2f_0. \end{cases} \quad (10)$$

증명) 보조정리 6과 f 가 홀수라는 사실로부터, L 은 $2f, 2f+2f_0-1$, 그리고 $2^n - (u+v)$ 중 최소값이 된다. 여기서 u 와 v 는 I 에서 각각 가장 큰 수와 그 다음으로 큰 수를 의미한다. $u+v = 2qf - f + 2f_0$ 이기 때문에 $2^n - (u+v) = f+2r-2f_0$ 가 된다. 그래서 다음 식이 성립한다.

$$L = \min\{2f, 2f+2f_0-1, f+2r-2f_0\}. \quad (11)$$

이제 (11)로부터 (9)와 (10)을 얻을 수 있다. □

만일 f 가 짝수면 보조정리 6으로부터 수열의 집합 W_I 의 LCZ는 다음과 같이 된다.

$$L = \min_{u,v \in I, u \neq v} (u-v) = f.$$

그러나 만일 f 가 odd면 정리 7로부터 LCZ는 f 보다 더 커지게 되고 이것이 바로 우리가 공차 f 를 홀수로 선택한 이유이다. 이제 다음과 같은 따름정리를 쉽게 얻을 수 있다.

따름정리 8. 생성법 1에서의 집합의 크기와 LCZ는 다음과 같이 주어진다.

$$ML = \begin{cases} N/2 - M(f-2r) - 2r + 1, & \text{for } f \geq 2r+1 \text{ and } f_0 = 0 \\ N/2 - M - 2r + 1, & \text{for } f < 2r+1 \text{ and } f_0 = 0 \\ N/2 - M(f-2r) - 2r + 1, & \text{for } f \geq 2(r-f_0) \text{ and } f_0 \neq 0 \\ N/2 - 2r + 1, & \text{for } f < 2(r-f_0) \text{ and } f_0 \neq 0 \end{cases}$$

□

이 값을 정리 5에 있는 Tang, Fan 그리고 Matsufuji의 상한값과 비교해 보면 본 논문에서 새롭게 생성한 LCZ 수열 집합은 대략적으로 최적의 값의 절반 정도에 해당하는 값을 보여주고 있다. 그러나 새로운 LCZ 수열 집합은 LCZ와 그에 따른 집합의 크기를 비교적 자유롭게 선택할 수 있는 자유를 제공해 줄 수 있다.

참고문헌

- [1] R. De Gaudenzi, C. Elia, and R. Viola, "Bandlimited quasi-synchronous CDMA: A novel satellite access

- technique for mobile and personal communication systems," *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 10, no. 2, pp. 328-343, Feb. 1992.
- [2] C. Ding, T. Helleseth, and H. Martinsen, "New families of binary sequences with optimal three-level autocorrelation," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 47, no. 1, pp. 428-433, Jan. 2001.
- [3] J.-W. Jang, J.-S. No, H. Chung, and X. Tang, "New sets of optimal p -ary low correlation zone sequence," submitted to *IEEE Trans. Inf. Theory*, Mar. 2005.
- [4] J.-W. Jang, J.-S. No, H. Chung, "A new construction of optimal p^2 -ary low correlation zone sequences using unified sequences," submitted to *IEICE Trans. Fundamentals*, Dec. 2005.
- [5] S.-H. Kim, J.-W. Jang, J.-S. No, and H. Chung, "New constructions of quaternary low correlation zone sequence," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 36, no. 3, pp. 633-640, May 1990.
- [6] P. V. Kumar and C.-M. Liu, "On lower bounds to the maximum correlation of complex roots-of unity sequences," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 36, no. 3, pp. 633-640, May 1990.
- [7] B. Long, P. Zhang, and J. Ju, "A generalized QS-CDMA system and the design of new spreading codes," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 47, no. 6, pp. 1268-1275, Nov. 1998.
- [8] J.-S. No, " p -ary unified sequences: p -ary extended d -form sequences with ideal autocorrelation property," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 48, no. 9, pp. 2540-2546, Sept. 2002.
- [9] R. A. Scholtz and L. R. Welch, "GMW sequences," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 30, no. 3, pp. 548-553, May 1984.
- [10] X. H. Tang, P. Z. Fan, and S. Matsufuji, "Lower bounds on correlation of spreading sequence set with low or zero correlation zone," *Electron. Lett.*, vol. 36, no. 6, pp. 551-552, Mar. 2000.