

Block-Type LDPC 부호의 계층적 복호에 대한 수렴 속도 분석[†]

*장민호, *신범규, *박우명, *노종선, **신동준

*서울대학교 전기·컴퓨터공학부, **한양대학교 전자통신컴퓨터공학부

*{mhjang, thethi, ppakoo}@ccl.snu.ac.kr, *jsno@snu.ac.kr, **djshin@hanyang.ac.kr

Convergence Speed Analysis of Layered Decoding of Block-Type LDPC Codes

*Min-Ho Jang, *Beomkyu Shin, *Woo-Myoung Park, *Jong-Seon No, and **Dong-Joon Shin

*Department of EECS, Seoul National University, **Division of ECE, Hanyang University

요 약

Block-type low-density parity-check (B-LDPC) 부호의 계층적 복호 (layered decoding)는 적은 개수의 메모리를 사용하여 실제 시스템에서 쉽게 구현될 수 있다. 본 논문에서, 우리는 이미 모의 실험 결과를 통하여 확인된 B-LDPC 부호의 계층적 복호에 대한 수렴 속도 개선 효과를 밝히기 위하여 정규 근사화 (Gaussian approximation)에 의한 밀도 진화 (density evolution)를 사용하여 계층적 복호를 분석한다. 또한 계층적 복호가 동일한 개수의 체크 노드 부분 집합을 임의로 구성한 순차 복호보다 수렴 속도가 더 빠르다는 사실을 보였다.

I. 서론

Low-density parity-check (LDPC) 부호는 다양한 통신 시스템에서 중요한 오류 정정 기법으로 채택되었다. 특히 block-type LDPC (B-LDPC) 부호는 광대역 무선 접속 시스템에 관한 IEEE 802.16e 표준 [1]에 포함되었으며, 또한 무선랜 (wireless LAN)의 데이터 전송률에 대한 제한을 극복하기 위한 IEEE 802.11n 표준 [2]으로 제안되었다. B-LDPC 부호는 선형 시간 부호화와 효율적인 복호를 실제 시스템에서 적은 수의 하드웨어 메모리를 사용하여 쉽게 구현할 수 있게 해준다.

Belief propagation (BP) 복호 [3]는 LDPC 부호의 복호 방법으로 잘 알려져 있다. 하지만 신뢰도 높은 정보를 복원하기 위하여 많은 반복 횟수를 필요로 하며, 이는 높은 계산 복잡도를 유발한다. 따라서 하드웨어 구현의 효율성과 복호를 개선하기 위하여 계층적 복호 (layered decoding) [4]가 제안되었다. [4]와 [5]에서, 계층적 복호의 개념과 하드웨어 구조가 논의되었다. 그러나 여기서 계층적 복호의 수렴 속도 개선은 모의 실험 결과 분석의 형태로만 제시되었다.

본 논문은 정규 근사화 (Gaussian approximation) [6]에 의한 밀도 진화 (density evolution)를 이용하여 B-LDPC 부호의 계층적 복호를 분석한다. 이상의 해석적 결과를 기반으로 계층적 복호가 다른 순차 복호 (sequential decoding)보다 더 빠른 수렴 속도를 보인다는 사실을 밝혔다. 또한 이러한 사실을 모의 실험 결과로 확인하였다.

II. 순차 복호와 계층적 복호

이번 장에서는 체크 노드 분할에 의한 순차 복호

알고리즘과 계층적 복호를 설명하고, 계층적 복호가 순차 복호의 한 특별한 경우라는 사실을 보인다.

2.1 순차 복호

체크 노드가 p 개의 부분 집합으로 분할된다고 하자. 변수 노드들과 임의의 한 부분 집합 내의 체크 노드들 사이에 각 반복 과정은 두 단계로 나누어 생각할 수 있다. 먼저, 각 변수 노드는 하나의 부분 집합내의 그것과 이웃한 체크 노드들로 갱신 메시지를 보낸다. 그리고 나서, 그 부분 집합내의 체크 노드들은 메시지를 갱신하고 이를 이웃한 변수 노드로 보낸다. 이러한 과정이 체크 노드들로 구성된 하나의 부분 집합에 대한 한 번의 반복에 해당한다. 연속적으로 남아있는 $p-1$ 개의 체크 노드의 부분 집합에 대하여 동일한 복호 과정을 수행한다. 이상의 과정을 통하여 복호의 한 번의 반복이 완료된다.

플러딩 스케줄링 (flooding scheduling)을 사용한 BP 복호는 각 반복에서 모든 메시지가 모든 노드들 사이에서 동시에 교환된다는 점에서 순차 복호와 다르다. 명백하게 한 번의 반복에 대하여, 순차 복호는 기존 BP 복호와 계산 복잡도는 거의 동일하지만 보다 큰 복호 지연 (latency)를 갖는다.

[7]에서, 임의 분할 (random partitioning)과 바이모달 분할 (bimodal partitioning)의 두 가지 경우를 고려하여 순차 복호 알고리즘을 분석하였다. 먼저 모든 체크 노드가 같은 크기를 갖는 p 개의 부분 집합으로 분할된다고 가정하자. 이제 각각의 체크 노드를 $1/p$ 의 확률로 p 개의 부분 집합 중 하나에 위치시킨다. 이러한 경우를 “임의 분할”이라고 말한다. 다음으로 체크 노드의 i 번째 부분 집합을 S_i , $1 \leq i \leq p$ 라고 하자. 이때 각 변수 노드에 연결된 체크 노드를 가능하면 균일하게 모든 부분 집합 S_1, S_2, \dots, S_p 사이에 분포시킨다. 그러면 각 변수 노드에 연결된 체크 노드에 대하여, 각각의 부분 집합에 포함되어 있는 체크 노드의 개수는 연속적인 두

[†] 본 연구는 교육인적자원부, 산업자원부, 노동부의 출연금으로 수행한 최우수실험실 지원사업과 정보통신부의 출연금으로 수행한 ITRC 과제의 연구 결과입니다.

정수 중 하나가 된다. 그러므로 이러한 경우를 “바이모달 분할”이라고 한다.

2.2 계층적 복호

계층적 복호 [4], [5]를 다음과 같이 설명할 수 있다. LDPC 부호의 Tanner 그래프상의 체크 노드를 각각의 변수 노드가 어떠한 부분 집합에도 최대 한 번의 연결을 가지도록 부분 집합들로 분할한다. 즉, 계층적 복호는 변수 노드의 최대 차수 (degree) 보다 크거나 같은 p 개의 부분 집합에 대하여 바이모달 분할을 사용한 순차 복호에 해당된다.

낮은 하드웨어 복잡도로 복호기의 구현이 가능하기 때문에, LDPC 부호가 계층적 복호를 지원하는 구조적 특성을 갖는 것이 선호된다. 예를 들어, IEEE 802.16e 표준에 제시된 B-LDPC 부호는 계층적 복호에 적합한 구조를 가지고 있다. 또한 [4]에서 계층적 복호가 수렴 속도를 개선한다는 사실을 보였다. 이는 복호기의 처리율 (throughput) 증가를 의미한다. 그러나 그들은 모의 실험 결과로만 수렴 속도 개선을 제시하였다. 그러므로 우리는 다음 장에서 계층적 복호의 수렴 속도 개선을 분석적으로 제시하려고 한다.

III. 정규 근사화에 의한 밀도 진화 분석

이제, 정규 근사화 [6]에 의한 밀도 진화를 기반으로 [7]과 유사하게 LDPC 부호의 계층적 복호의 수렴 속도를 분석한다. 편의상 우리는 (d_v, d_c) 규칙 (regular) LDPC 부호를 고려할 것이다. 여기서 d_v 와 d_c 는 각각 변수 노드와 체크 노드의 차수이다. 유사한 분석을 불규칙 LDPC 부호에 대해서도 적용할 수 있다.

v 와 u 를 각각 변수 노드에서 체크 노드로 보낸 메시지와 체크 노드로부터 변수 노드로의 메시지라고 하자. 이때 모든 메시지는 LLR (log-likelihood ratio) 형태를 사용한다. 또한 m_u 와 m_v 를 각각 u 와 v 의 평균 (mean)이라고 하자. 이제 다음의 수식 (1)과 같이 함수 $\phi(x)$ 를 정의한다.

$$\phi(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{4\pi x}} \int_R \tanh \frac{u}{2} e^{-\frac{(u-x)^2}{4x}} du, \text{ for } x > 0 \quad (1)$$

이때, $\phi(0) = 1$ 이고 $\phi(\infty) = 0$ 이다.

3.1 계층적 복호에 대한 밀도 진화 분석

이미 언급한 바와 같이, 계층적 복호는 $p \geq d_v$ 인 바이모달 분할을 사용한 순차 복호에 해당한다. 그러므로 [7]과 유사하게, $p \geq d_v$ 를 갖는 바이모달 분할을 이용한 순차 복호의 분석에 집중하고자 한다. 하나의 변수 노드에서 p 개의 부분 집합으로의 연결을 위한 서로 다른 선 분포 (distinct edge distribution)의 개수는 $pC_d = \frac{p!}{d_v!(p-d_v)!}$ 가 된다. 어떤 변수 노드로부터 하나의 선이 부분 집합 S_i 에 연결되어 있다면, 서로 다른 선 분포의 개수는 $p-1C_{d-1}$ 가 된다. 어떤 변수 노드의 주어진 선 분포 (a_1, a_2, \dots, a_p) 에 대하여, l -번째 반복에서 이 변수 노드로부터 부분 집합 S_i 로의 메시지의 평균은 다음 수식 (2)와 같이 표현할 수 있다. 이때 a_j 는 그

변수 노드로부터 S_i 에 있는 체크 노드들로 연결된 선의 개수이고, 따라서 $\sum_{j=1}^p a_j = d_v$ 이다.

$$m_{u_{S_i}}^{(l)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_j m_{u_{S_j}}^{(l)} + \sum_{j=i+1}^p a_j m_{u_{S_j}}^{(l-1)} \quad (2)$$

여기서 윗 첨자는 반복 횟수를 나타내고, a_j 는 0 이나 1 값을 갖는다. 그러면 (2)에서 평균 값을 갖는 메시지가 부분 집합 S_i 로 전달될 확률은 $1/p-1C_{d-1}$ 이다. 그러므로 S_i 상의 체크 노드로부터 변수 노드로의 메시지의 평균에 대한 l -번째 반복에서의 재귀 방정식은 다음과 같이 유도 가능하다.

$$m_{u_{S_i}}^{(l)} = \phi^{-1} \left(1 - \left[1 - \frac{1}{p-1C_{d-1}(a_1, \dots, a_p)} \sum \phi(m_{u_0} + \sum_{j=1}^{i-1} a_j m_{u_{S_j}}^{(l)} + \sum_{j=i+1}^p a_j m_{u_{S_j}}^{(l-1)}) \right]^{d_c-1} \right) \quad (3)$$

3.2 임의 분할에 대한 밀도 진화 분석

임의 분할을 사용한 순차 복호 알고리즘이 [7]에서 분석되었다. S_i 상의 체크 노드로부터 변수 노드로의 메시지의 평균에 대한 l -번째 반복에서의 재귀 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$m_{u_{S_i}}^{(l)} = \phi^{-1} \left(1 - \left[1 - \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_p) \\ a_i \neq 0}} \frac{(d_v-1)!}{a_1! a_2! \dots (a_i-1)! \dots a_p! p^{d_v-1}} \times \phi \left(m_{u_0} + (a_i-1)m_{u_{S_i}}^{(l-1)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_j m_{u_{S_j}}^{(l)} + \sum_{j=i+1}^p a_j m_{u_{S_j}}^{(l-1)} \right) \right]^{d_c-1} \right) \quad (4)$$

3.3 평균 진화

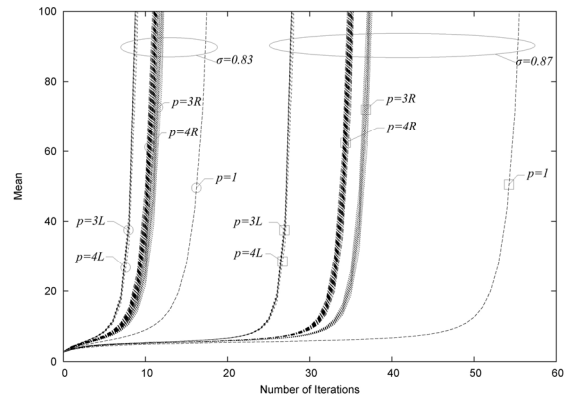


그림 1. (3,6) 규칙 LDPC 부호 ($\sigma = 0.83$ 과 $\sigma = 0.87$)에 대하여 다양한 부분 집합의 개수를 사용하였을 경우에 대한 임의 분할과 계층적 복호의 평균 진화.

다음으로 IEEE 802.16e 표준 [1]에 제시되어있는 12×24 베이스 행렬로 정의된 부호 길이가 2304 이고 부호율이 1/2 인 불규칙 B-LDPC 부호를 고려하자. $p=6$ 인 계층적 복호를 위하여 12×24 베이스 행렬의 $\{1,10\}$, $\{2,11\}$, $\{3,5\}$, $\{4,6\}$, $\{7,9\}$, $\{8,12\}$ 행에 대응하는 체크 노드의 6 개의 부분 집합이 사용된다. 그림 4 는 다양한 반복 횟수 I 에 대하여 플러딩 스케줄링 ($p=1$) 과 임의 분할 ($p=6$) , 그리고 계층적 복호 ($p=6$) 의 FER 성능을 보여준다. 이를 통하여 불규칙 부호의 경우에 대해서도 규칙 부호의 경우에서 처럼 유사한 결과를 보인다는 사실을 확인할 수 있다.

V. 결론

본 논문에서, 우리는 정규 근사화에 의한 밀도 진화 방법을 이용하여 계층적 복호의 수렴 속도의 개선을 분석하였다. 또한 이 사실을 모의 실험 결과로도 확인하였다. 동일한 복호 성능이 계층적 복호를 사용하여 더 적은 반복에 의하여 도달할 수 있기 때문에, 하드웨어 구현 복잡도뿐만 아니라 전체 복호의 계산 복잡도도 줄일 수 있다.

참고문헌

- [1] "Part 16: Air interface for fixed and mobile broadband wireless access systems," *IEEE P802.16e/D8*, May 2005.
- [2] "Part 11: Wireless LAN medium access control and physical layer specifications," *IEEE P802.11n/D1.0*, Mar. 2006.
- [3] T. J. Richardson and R. L. Urbanke, "The capacity of low-density parity-check codes under message-passing decoding," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 599-618, Feb. 2001.
- [4] D. E. Hocevar, "A reduced complexity decoder architecture via layered decoding of LDPC codes," in *Proc. IEEE Workshop on Signal Processing Systems (SIPS)*, Oct. 2004, pp. 107-112.
- [5] M. Rovini, F. Rossi, P. Ciao, N. L'Insalata, and L. Fanucci, "Layered decoding of non-layered LDPC codes," in *Proc. The 9th EUROMICRO Conf. Digital System Design (DSD)*, Aug. 2006, pp. 537-544.
- [6] S.-Y. Chung, *On the construction of some capacity-approaching coding schemes.*, Ph.D. dissertation, MIT, Cambridge, MA, Sep. 2000.
- [7] S. Kim, M.-H. Jang, J.-S. No, S.-N. Hong, and D.-J. Shin, "Analysis of complexity and convergence speed of sequential schedules for decoding LDPC codes," in *Proc. ISITA 2006*, Oct. 2006, pp. 629-634.
- [8] M. Fossorier, "Quasi-cyclic low-density parity-check codes from circulant permutation matrices," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 50, no. 8, pp. 1788-1793, Aug. 2004.