이상적 자기 상관 특성을 가진 이진 수열로부터 생성된 이상적 자기 상관 특성을 갖는 4진 수열

*장지웅, **김영식, †김상효O, ‡노종선
*Dept. ECE UCSD, **삼성전자
†성균관대학교 정보통신공학부, ‡서울대학교 전기·컴퓨터공학부

Quaternary Sequences with Ideal Autocorrelation Constructed From Binary Sequences with Ideal Autocorrelation

*Ji-Woong Jang, **Young-Sik Kim, †Sang-Hyo KimO, and ‡Jong-Seon No
*Dept. EECS UCSD, **Samgsung Electronics
†School of ICE, Sungkyunkwan University, ‡Dept. EECS, Seoul National University

요약

본 논문에서는 주기가 2^n-1인 이상적인 자기 상관 특성을 갖는 이진 수열과 Gray 사상을 이용하여 주기가 $2(2^n-1)$인 이상적인 자기 상관 특성을 갖는 4진 수열의 생성법을 제안한다. 또한 새로 제안된 4진 수열의 자기상관 분포도 유도 하였다.

1. 서론

자기 상관특성이 우수한 의사 불규칙 수열은 통신, 암호와 같은 여러 디지털 시스템에서 중요한 역할을 하고 있다. 이러한 수열군들에 있어 가장 중요한 특성은 자기 자신의 위상 변화된 수열과 쉽게 구분이 되어야 한다는 것이다. 즉, 동기점 이외에서의 자기 상관값이 작아야 한다. 또한 이진 및 4진 변조를 이용하는 디지털 통신 시스템에 적용하기 용이한 이점 때문에 이진 및 4진 수열이 다른 수열보다 각광을 받고 있다. 이러한 이유로 현재까지 우수한 상관특성을 갖는 이진 및 4진 수열에 대한 다양한 연구가 진행되어 왔다.

$R_{\max}$가 동기점을 제외한 다른 위상에서의 자기상관 특성의 최대값이라 하자. $R_{\max}=0$이면 이를 완전 자기상관 특성이라 한다. 그러나 몇몇 아주 짧은 주기를 제외하면 완전 자기상관 특성을 갖는 이진 및 4진 수열이 존재하지 않는 다는 것이 현재까지의 가설이며, 수많은 모의실험 결과가 이를 뒷받침하고 있다 [1]. $R_{\max}=1$이면 이를 이상적인 자기상관 특성이라 하며, 이진 수열에 있어 현재까지 m-수열 [2], GMW수열 [3], 방정식의 사상수열 [4] 등과 같은 수많은 연구 결과가 알려져 있다.

우수한 상관특성을 갖는 4진 수열에 대해서도 다양한 연구 결과들이 제안되어 왔다 [1], [5], [6], [7], [8]. Sidel'nikov는 우수한 상관특성을 갖는 M진 수열을 제안하였다 [5]. 이 수열에는 4진 수열이 그 특정 유형으로 포함된다. Schotten의 상보성에 기반한 수열군은 홀수 주기와 우수한 상관특성을 갖는 4진 수열의 생성법이다 [1], [6], [7]. 또한 Luke와 Schotten, Hadinejad-Mahram은 짝수 주기에 대하여 $R_{\max}=2$인 4진 수열의 생성법을 제안하였다. 주기가 $N\equiv 2 \pmod 4$인 경우에는, Lee의 완전 상관특성을 갖는 수열 [9]을 이용하여 생성한 $R_{\max}=2$인 수열이 존재한다 [1]. 이는 현재까지 알려진 순수한 4진 수열중 자기 상관특성이 가장 우수한 수열이다.

본 논문에서는 주기가 2^n-1인 이상적인 자기 상관특성을 갖는 이진 수열과 Gray 사상을 이용하여 주기가 $2(2^n-1)$인 이상적인 자기 상관 특성을 갖는 4진 수열의 생성법을 제안한다. 또한 새로 제안된 4진 수열의 자기상관 분포도 유도 하였다.

2. 사전지식

이번 장에서는 이후 논문에 이용되는 몇몇 정의와 사전 지식들에 대해 간단히 기술할 것이다. 양의 정수 q와 N에 대하여 $g(t)$가 주기가 N인 q진 수열이라 하자. 또한 집합 A_k를 다음과 같이 정의한다.

$$A_k=\{t \mid g(t)=k, 0\le t<N\}, k=0,1,\cdots,q-1.$$

이 때, 주기가 N인 4진 수열 $g(t)$가 균형성을 갖는다는 것과 임의의 i,j에 대하여 $|A_i-A_j|\le 1$이라는 것은 동치이다.

$g(t)$의 자기 상관함수는 다음과 같이 정의된다.

$$R_g(\tau)=\sum_{t=0}^{N-1}\omega_q^{g(t)-g(t+\tau)}$$

단, $0\le\tau<N$이고 ω_q 는 q차 원시 단위근이다.

수열이 동기 획득을 위한 사전수열등으로 통신 시스템에서 이용되기 위해서는 다음과 같은 특성들이 요구된다:

- 동기점 이외의 위상에서 자기 상관함수값의 최대값이 되도록 작아야 한다;
- 자기상관 함수값의 최대값이 나타나는 빈도가 되도록 작아야 한다.

수열의 이러한 성질들은 무선통신 시스템의 동기획득을 위하여 적용될 때, 잘못된 동기획득의 비율을 줄여주게 된다. 이제 위의 두가지 특성을 만족하는 수열을 *이상적인 자기 상관특성*을 갖는 수열로 정의하자. 주기가 홀수인 이진 수열에 있어 이상적인 자기 상관특

성이 다음과 같은 자기 상관분포를 갖는 것은 익히 알려진 사실이다

$$R_g(\tau) = \begin{cases} N, & \text{once} \\ -1, & N-1 \text{ times.} \end{cases}$$

이 때, 주기가 짝수이고 균형성을 갖는 4진 수열에 있어 이상적인 자기 상관특성이 다음과 같이 정의됨은 자명한 사실이다.

정리 1: 짝수 정수 N에 대해 이상적인 자기 상관특성을 갖는 4진 수열 $g(t)$의 자기 상관분포는 다음과 같이 주어진다.

$$R_g(\tau) = \begin{cases} N, & \text{once} \\ 0, & \frac{N}{2}-1 \text{ times} \\ -2, & \frac{N}{2} \text{ times.} \end{cases} \quad (1)$$

이제 Z_{2^n-1}이 $Z_{2^n-1} = \{0, 1, 2, \ldots, 2^n-2\}$과 같이 2^n-1으로 나눈 잉여류의 집합이라고 하자. 또한 양의 정수 n에 대해 $s(t)$가 주기가 2^n-1인 이상적인 자기 상관특성을 갖는 이진 수열이라 하자. 이 때, $s(t-u)$의 특성 집합 D_u는 다음과 같이 정의된다.

$$D_u = \{t \mid s(t-u) = 1,\ 0 \le t \le 2^n-2\} = D_0 + u$$

단, $u \in Z_{2^n-1}$이고 $D_0 + u = \{d+u \mid d \in D_0\}$, "+"는 Z_{2^n-1}하에서의 덧셈이다. $s(t)$의 균형성으로부터 다음이 성립함은 자명하다.

$$|D_u| = 2^{n-1}, \quad |\overline{D}_u| = 2^{n-1}-1.$$

또한 $s(t)$가 이상적인 자기 상관특성을 가지므로 $u \neq v$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} |D_u \cap D_v| &= 2^{n-2} \\ |D_u \cap \overline{D}_v| &= 2^{n-2} \\ |\overline{D}_u \cap D_v| &= 2^{n-2} \\ |\overline{D}_u \cap \overline{D}_v| &= 2^{n-2}-1. \end{aligned}$$

$u = v$인 경우 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} |D_u \cap D_v| &= 2^{n-1} \\ |D_u \cap \overline{D}_v| &= 0 \\ |\overline{D}_u \cap D_v| &= 0 \\ |\overline{D}_u \cap \overline{D}_v| &= 2^{n-1}-1. \end{aligned} \quad (2)$$

중국인의 나머지 정리에 의한 동형사상

$$\phi\ :\ \zeta \longmapsto (\zeta \bmod 2, \zeta \bmod 2^n-1)$$

하에 $Z_{2\times(2^n-1)} \cong Z_2 \otimes Z_{2^n-1}$로 나타낼수 있으므로 이후 편의상 $\zeta \in Z_{2\times(2^n-1)}$와 $(\zeta \bmod 2, \zeta \bmod 2^n-1)$를 동일한 의미로 사용한다.

이제 $\phi[a,b]$를 다음과 같이 정의되는 Gray 사상이라 하자.

$$\phi[a,b] = \begin{cases} 0, & \text{if } (a,b) = (0,0) \\ 1, & \text{if } (a,b) = (0,1) \\ 2, & \text{if } (a,b) = (1,1) \\ 3, & \text{if } (a,b) = (1,0). \end{cases}$$

주기가 N인 두 이진 수열 $a(t)$, $b(t)$와 주기가 N인 4진 수열 $q(t) = \phi[a(t), b(t)]$에 대하여 다음이 성립함을 쉽게 알 수 있다 [8].

$$\omega_4^{q(t)} = \frac{1+\omega_4}{2}(-1)^{a(t)} + \frac{1-\omega_4}{2}(-1)^{b(t)}. \quad (3)$$

3. 이상적인 자기 상관 성질을 갖는 새로운 4진 수열

이번 장에서는 이상적인 자기 상관특성을 갖는 이진수열로부터 4진수열을 생성하는 생성법을 제안한다. 새로 제안된 4진 수열의 자기 상관함수는 동기점을 제외한 나머지 위상에서 0과 -2만을 가지며 이는 주기가 $N \equiv 2 \bmod 4$인 4진 수열에 대하여 현재까지 알려진 최상의 결과이다. 또한 새로 제안된 4진 수열의 자기 상관분포 역시 유도하였다.

Krone와 Sarwate는 이진 수열과 이를 이용하여 (3)과 같이 생성한 4진 수열의 상관함수 간에 다음과 같은 관계가 성립함을 보였다.

예비정리 2 (Krone and Sarwate [8]): $a(t)$와 $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$가 동일한 주기를 갖는 이진 수열이고, $p(t)$와 $q(t)$가 각각 $p(t) = \phi[a(t), b(t)]$, $q(t) = \phi[c(t), d(t)]$와 같이 정의되는 4진 수열이라 하자. 이 때 $p(t)$와 $q(t)$ 간의 상호 상관함수 $R_{p,q}(\tau)$는 다음과 같이 주어진다.

$$R_{p,q}(\tau) = \frac{1}{2}\{R_{ac}(\tau) + R_{bd}(\tau)\} + \frac{\omega_4}{2}\{(R_{ad}(\tau) - R_{bc}(\tau))\}$$

단, $R_{ac}(\tau)$는 두 이진수열 $a(t)$와 $c(t)$간의 상호 상관함수이다.

이상적인 자기 상관특성을 갖는 이진 수열과 Gray 사상을 이용하여 다음 정리와 같이 (1)의 자기 상관분포를 갖는 4진 수열을 생성할 수 있다.

정리 3: 양의 정수 n에 대해, $s(t)$가 이상적인 자기 상관특성을 갖는 주기가 2^n-1인 이진 수열이라 하고 D_0는 $s(t)$의 특성집합이라 하자. 또한 4진 수열 $q(t)$를 다음과 같이 정의하자.

$$q(t) = \phi[a(t), b(t)]$$

단, $a(t)$와 $b(t)$는 다음과 같이 정의되는 주기기 $2^{n+1}-2$인 이진 수열이다.

$$a(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } t \in \{0,1\} \otimes D_0 \\ 0, & \text{if } t \in \{0,1\} \otimes \overline{D}_0 \end{cases} \quad (4)$$

$$b(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } t \in \{0\} \otimes D_0 \bigcup \{1\} \otimes \overline{D}_0 \\ 0, & \text{if } t \in \{0\} \otimes \overline{D}_0 \bigcup \{1\} \otimes D_0. \end{cases} \quad (5)$$

이 때, 주기가 $2^{n+1}-2$인 4진 수열 $q(t)$는 이상적인 자기 상관특성을 가지며, 자기 상관분포는 다음과 같이 주어진다.

$$R_q(\tau) = \begin{cases} 2^{n+1}-2, & \text{for } \tau = 0 \\ 0, & \text{for } \tau \equiv 1 \bmod 2 \\ -2, & \text{for } \tau \equiv 0 \bmod 2 \text{ and } \tau \neq 0. \end{cases}$$

증명: $\tau = 0$일 때, $R_q(\tau) = 2^{n+1}-2$임은 자명하다. 사전정리 2로부터, $R_q(\tau)$를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$R_q(\tau) = \frac{1}{2}\{R_a(\tau) + R_b(\tau)\} + \frac{\omega_4}{2}\{(R_{ab}(\tau) - R_{ba}(\tau))\}.$$

그러므로 $R_a(\tau)$와 $R_b(\tau)$, $R_{ab}(\tau)$, $R_{ba}(\tau)$를 구하는 것으로 $R_q(\tau)$를 구할 수 있다.

$a(t)$의 정의로 부터 $a(t)$를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$a(t) = s(t \bmod 2^n - 1).$$

그러므로 다음이 성립함은 자명하다.

$$R_a(\tau) = \begin{cases} 2^{n+1} - 2, & \text{for } \tau = 0 \text{ or } \tau = 2^n - 1 \\ -2, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (6)$$

이제 $t_0, \tau_0 \in Z_2$와 $t_1, \tau_1 \in Z_{2^n-1}$에 대해, $t = (t_0, t_1)$와 $\tau = (\tau_0, \tau_1)$를 정의하면 정리 3에서 정의된 $a(t)$와 $b(t)$의 정의로부터 $b(t)$를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$b(t) = \begin{cases} a(t), & \text{if } t_0 = 0 \\ a(t) + 1 \mod 2, & \text{if } t_0 = 1. \end{cases}$$

이 때, $b(t)$의 자기 상관함수 $R_b(\tau)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} R_b(\tau) &= \sum_{t=0}^{2^{n+1}-3} (-1)^{b(t)+b(t+\tau)} \\ &= \sum_{t_0=0}^{1} \sum_{t_1=0}^{2^n-2} (-1)^{b(t_0,t_1)+b(t_0+\tau_0,t_1+\tau_1)}. \end{aligned} \quad (7)$$

$\tau_0 = 0$인 경우, (3)으로 부터 위식의 $R_b(\tau)$는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} R_b(\tau) &= \sum_{t_0=0}^{1} \sum_{t_1=0}^{2^n-2} (-1)^{b(t_0,t_1)+b(t_0,t_1+\tau_1)} \\ &= \sum_{t_1=0}^{2^n-2} (-1)^{a(0,t_1)+a(0,t_1+\tau_1)} \\ &\quad + \sum_{t_1=0}^{2^n-2} (-1)^{a(1,t_1)+1+a(1,t_1+\tau_1)+1} \\ &= \sum_{t_0=0}^{1} \sum_{t_1=0}^{2^n-2} (-1)^{a(t_0,t_1)+a(t_0+\tau_0,t_1+\tau_1)} \\ &= \sum_{t=0}^{2^{n+1}-3} (-1)^{a(t)+a(t+\tau)} = R_a(\tau). \end{aligned} \quad (8)$$

또한 $\tau_0 = 1$인 경우, (3)으로 부터 위식의 $R_b(\tau)$는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} R_b(\tau) &= \sum_{t_0=0}^{1} \sum_{t_1=0}^{2^n-2} (-1)^{b(t_0,t_1)+b(t_0+1,t_1+\tau_1)} \\ &= \sum_{t_1=0}^{2^n-2} (-1)^{a(0,t_1)+a(1,t_1+\tau_1)+1} \\ &\quad + \sum_{t_1=0}^{2^n-2} (-1)^{a(1,t_1)+1+a(0,t_1+\tau_1)} \\ &= -\sum_{t_0=0}^{1} \sum_{t_1=0}^{2^n-2} (-1)^{a(t_0,t_1)+a(t_0+\tau_0,t_1+\tau_1)} \\ &= -\sum_{t=0}^{2^{n+1}-3} (-1)^{a(t)+a(t+\tau)} = -R_a(\tau). \end{aligned} \quad (9)$$

이제 (8)와 (9)로 부터 $R_b(\tau)$를 다음과 같이 계산 할 수 있다.

$$R_b(\tau) = \begin{cases} 2^{n+1} - 2, & \text{for } \tau = 0 \\ -2^{n+1} + 2, & \text{for } \tau = 2^n - 1 \\ -2, & \text{for } \tau \equiv 0 \bmod 2 \text{ and } \tau \neq 0 \\ 2, & \text{for } \tau \equiv 1 \bmod 2 \text{ and } \tau \neq 2^n - 1. \end{cases} \quad (10)$$

이와 유사한 방식으로 $a(t)$와 $b(t)$간의 상호 상관함수 $R_{ab}(\tau)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} R_{ab}(\tau) &= \sum_{t=0}^{2^{n+1}-3} (-1)^{a(t)+b(t+\tau)} \\ &= \sum_{t_0=0}^{1} \sum_{t_1=0}^{2^n-2} (-1)^{a(t_0,t_1)+b(t_0+\tau_0,t_1+\tau_1)}. \end{aligned}$$

$\tau_0 = 0$인 경우, (3)로부터 $R_{ab}(\tau)$를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} R_{ab}(\tau) &= \sum_{t_0=0}^{1} \sum_{t_1=0}^{2^n-2} (-1)^{a(t_0,t_1)+b(t_0,t_1+\tau_1)} \\ &= \sum_{t_1=0}^{2^n-2} (-1)^{a(0,t_1)+a(0,t_1+\tau_1)} \\ &\quad + \sum_{t_1=0}^{2^n-2} (-1)^{a(1,t_1)+a(1,t_1+\tau_1)+1}. \end{aligned} \quad (11)$$

(3)을 이용하면 위 식이 아래와 같이 계산됨은 자명하다.

$$\sum_{t_1=0}^{2^n-2} (-1)^{a(0,t_1)+a(\tau_0,t_1+\tau_1)} = \sum_{t_1=0}^{2^n-2} (-1)^{s(t)+s(t+\tau)} = R_s(\tau)$$

$$\sum_{t_1=0}^{2^n-2} (-1)^{a(1,t_1)+a(1+\tau_0,t_1+\tau_1)+1} = -\sum_{t_1=0}^{2^n-2} (-1)^{s(t)+s(t+\tau)} = -R_s(\tau).$$

그러므로 $R_{ab}(\tau) = 0$이다. 또한 $\tau_0 = 1$인 경우, (11)는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} R_{ab}(\tau) &= \sum_{t_0=0}^{1} \sum_{t_1=0}^{2^n-2} (-1)^{a(t_0,t_1)+b(t_0+1,t_1+\tau_1)} \\ &= \sum_{t_1=0}^{2^n-2} (-1)^{a(0,t_1)+a(1,t_1+\tau_1)+1} \\ &\quad + \sum_{t_1=0}^{2^n-2} (-1)^{a(1,t_1)+a(0,t_1+\tau_1)} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

$R_{ab}(\tau)$와 유사한 과정을 통하여 $R_{ba}(\tau) = 0$임을 알 수 있다.

(6)와 (10), (12)로부터 $R_q(\tau)$는 다음과 같이 계산된

다.

$$\begin{aligned} R_q(\tau) &= \frac{1}{2}\{R_a(\tau)+R_b(\tau)\}+\frac{\omega_4}{2}\{(R_{ab}(\tau)-R_{ba}(\tau))\} \\ &= \begin{cases} 2^{n+1}-2, & \text{for } \tau=0 \\ 0, & \text{for } \tau\equiv 1 \bmod 2 \\ -2, & \text{for } \tau\equiv 0 \bmod 2 \text{ and } \tau\neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

□

이진 m-수열을 이용하여 다음과 같이 위 정리의 예제를 보일 수 있다.

예제 4: $s(t)$가 다음과 같이 주어지는 주기가 15인 이진 m-수열 이라 하자.

$$s(t) = 0,0,0,1,0,0,1,1,0,1,0,1,1,1,1.$$

이 때, 정리 3에서 정의된 $a(t)$와 $b(t)$는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} a(t) &= 0,0,0,1,0,0,1,1,0,1,0,1,1,1,1, \\ &\quad 0,0,0,1,0,0,1,1,0,1,0,1,1,1,1 \\ b(t) &= 0,1,0,0,0,1,1,0,0,0,0,0,1,0,1, \\ &\quad 1,0,1,1,1,0,0,1,1,1,1,1,0,1,0. \end{aligned}$$

정리 3에서 정의된 $q(t)$의 정의로 부터 $q(t)$가 다음과 같이 생성됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} q(t) &= 0,1,0,3,0,1,2,3,0,3,0,3,2,3,2, \\ &\quad 1,0,1,2,1,0,3,2,1,2,1,2,3,2,3. \end{aligned}$$

이 때, $q(t)$의 자기 상관함수 $R_q(\tau)$는 다음과 같은 값을 갖는다.

$$\begin{aligned} R_q(\tau) &= 30,0,-2,0,-2,0,-2,0,-2,0,-2,0,-2,0,-2, \\ &\quad 0,-2,0,-2,0,-2,0,-2,0,-2,0,-2,0,-2,0. \end{aligned}$$

(4)와 (5)로부터 새로 제안된 4진 수열 $q(t)$의 균형성에 대한 다음 정리를 도출할 수 있다.

정리 5: $q(t)$가 정리 3에서 정의된 4진 수열이라 하자. 이 때, $q(t)$는 다음과 같은 균형성을 갖는다.

$$q(t) = \begin{cases} 0, & 2^{n-1}-1 \text{ times} \\ 1, & 2^{n-1}-1 \text{ times} \\ 2, & 2^{n-1} \text{ times} \\ 3, & 2^{n-1} \text{ times}. \end{cases}$$

증명: $q(t)$의 정의로 부터 다음이 성립한다.

$$q(t) = \begin{cases} 0, & \text{for } t\in\{0\}\otimes(\overline{D}_0\cap\overline{D}_0) \\ & \text{or } t\in\{1\}\otimes(\overline{D}_0\cap D_0) \\ 1, & \text{for } t\in\{0\}\otimes(\overline{D}_0\cap D_0) \\ & \text{or } t\in\{1\}\otimes(\overline{D}_0\cap\overline{D}_0) \\ 2, & \text{for } t\in\{0\}\otimes(D_0\cap D_0) \\ & \text{or } t\in\{1\}\otimes(D_0\cap\overline{D}_0) \\ 3, & \text{for } t\in\{0\}\otimes(D_0\cap\overline{D}_0) \\ & \text{or } t\in\{1\}\otimes(D_0\cap D_0). \end{cases}$$

이 때, $D\cap\overline{D}=\emptyset$이고 $D\cap D=D$이므로 $q(t)$를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$q(t) = \begin{cases} 0, & \text{for } t\in\{0\}\otimes\overline{D}_0 \\ 1, & \text{for } t\in\{1\}\otimes\overline{D}_0 \\ 2, & \text{for } t\in\{0\}\otimes D_0 \\ 3, & \text{for } t\in\{1\}\otimes D_0. \end{cases}$$

(2)로부터 $q(t)$가 다음의 분포를 가짐은 자명하다.

$$q(t) = \begin{cases} 0, & 2^{n-1}-1 \text{ times} \\ 1, & 2^{n-1}-1 \text{ times} \\ 2, & 2^{n-1} \text{ times} \\ 3, & 2^{n-1} \text{ times}. \end{cases}$$

위의 분포로부터 $q(t)$가 균형성을 가짐을 알 수 있다. □

4. 참고문헌

[1] H. Dieter Luke, H. D. Schotten, and H. Hadinejad-Mahram, "Binary and quadriphase sequences with optimal autocorrelation properties: A Survey," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 49, no. 12, pp. 3271–3282, Dec. 2003.

[2] J. F. Dillon and H. Dobbertin, "New cyclic difference sets with Singer parameters," *Finite Fields Appl.,* vol. 10, no. 3, pp. 342–389, July 2004.

[3] B. Gordon, W. H. Mills, and L. R. Welch, "Some new difference sets," *Canadian J. Math.,* vol. 14, no. 4, pp. 614–625, 1962.

[4] J.-S. No, H. Chung, and M. S. Yun, "Binary pseudorandom sequences of period 2^n-1 with ideal autocorrelation generated by the polynomial $z^d+(z+1)^d$," *IEEE Trans. Inf. Theory,* vol. 44, no. 3, pp. 1278–1282, May 1998.

[5] V. M. Sidel'nikov, "Some k-valued pseudo-random sequences and nearly equidistant codes," *Probl. Inf. Transm.*, vol. 5, no. 1, pp. 12–16, 1969.

[6] H. D. Schotten, "New optimum ternary complementary sets and almost quadriphase, perfect sequences," in *Proc. Int. Conf. Neural Networks and Signal Process.'95*, Nanjing, China, Dec. 1995, pp. 1106–1109.

[7] H. D. Schotten, "Optimum complementary sets and quadriphase sequences derived from q-ary m-sequences," in *Proc. IEEE Int. Symp. Inf. Theory'97*, Ulm, Germany, 1997, p. 485.

[8] S. M. Krone and D. V. Sarwate,"Quadriphase sequences for spread spectrum multiple-access communication," *IEEE Trans. Inf. Theory,* vol. IT-30, no. 3, pp. 520–529, May 1984.

[9] C. E. Lee, " Perfect q-ary sequences from multiplicative characters over $GF(p)$," *Electron. Lett.*, vol. 28, pp. 833–835, 1992.