감마확률변수의 조화평균에 대한 근사적 최대 분포

*송경영^{O}, *김재홍, *노종선, **정하봉
*서울대학교 전기컴퓨터공학부, 뉴미디어통신공동연구소
**홍익대학교 전자전기공학부
{sky6174, kilmd55}@ccl.snu.ac.kr, jsno@snu.ac.kr, habchung@hongik.ac.kr

On the Approximate Maximum Distribution for Harmonic Mean of Two Gamma Random Variables

*Kyoung-Young Song^{O}, *Jaehong Kim, *Jong-Seon No, and **Habong Chung
*Department of EECS, INMC, Seoul National University
**School of Electronics and Electrical Engineering, Hongik University,
{sky6174, kilmd55}@ccl.snu.ac.kr, jsno@snu.ac.kr, habchung@hongik.ac.kr

요약

본 논문에서는 감마확률변수의 조화평균에 대한 최대 분포를 구하는 것을 고려한다. 두 확률변수의 통계가 같을 때, 조화평균의 확률밀도함수(probability density function: pdf), 누적분포함수(cumulative distribution function: cdf)와 질량생성함수(moment generating function: mgf)는 Meijer G 함수와 Gauss F 함수로 표현된다. 이 함수들에 Padé 근사화 기법을 적용하여 근사적 pdf와 mgf를 구하고 비교한다.

1. 개요

다중 안테나 기반의 연판정 후 전달(soft-decision-and-forward: SDF) [1] 협력통신에서의 릴레이 링크의 신호 대 잡음비(signal-to-noise ratio)는 감마확률변수의 조화 평균으로 표현된다. 이 시스템의 비트오율은 [2]에서 유도된 조화평균의 질량생성함수(moment generation function: mgf)를 이용하여 계산 가능하다. 다중 릴레이 협력통신망에서 릴레이 선택 기법을 적용할 경우, 조화평균의 최대 분포를 구해야 한다. 하지만 이것을 구하는 것은 쉽지 않다. 이 논문에서는, 이를 해결하기 위해 Padé 근사화(Padé approximation: PA) [3]를 이용한다.

2장에서는 감마 확률 변수에 대한 표현과 조화평균에 대한 확률밀도함수(probability density function: pdf), 누적분포함수(cumulative distribution function: cdf), 질량생성함수(moment generating function: mgf)를 복습한다. 3장에서는 one-point PA를 적용하여 조화평균의 근사적 mgf를 구하고, 이를 이용하여 조화평균에 대한 최대변수의 pdf, cdf, 그리고 mgf를 구하고 이를 실제 값들과 비교하고 결론을 맺는다.

2. 감마확률변수의 조화평균

확률변수 X가 shape parameter가 K이고 scale parameter가 Ω인 다음과 같은 pdf를 가지면 X는 감마분포를 따른다고 하고, $X \sim \mathcal{G}(K,\Omega)$로 표시한다.

$$f_X(x;K,\Omega) = \frac{x^{K-1}}{\Omega^K \Gamma(K)} e^{-\frac{x}{\Omega}}, \quad K,\Omega > 0$$

$X_1, X_2 \sim \mathcal{G}(K,\Omega)$인 두 감마확률변수에 대한 조화평균은 다음과 같이 정의한다.

$$Y \triangleq \frac{2X_1X_2}{X_1+X_2}$$

Y에 대한 pdf, cdf, mgf는 다음과 같다 [2].

$$f_Y(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2K-2}\Gamma(K)^2\Omega} G^{2,0}_{1,2}\left[\frac{2}{\Omega}y\middle|\begin{matrix} K-\frac{1}{2} \\ K-1, 2K-1\end{matrix}\right]$$

$$F_Y(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2K-1}\Gamma(K)^2} G^{2,1}_{2,3}\left[\frac{2}{\Omega}y\middle|\begin{matrix} 1, K+\frac{1}{2} \\ K, 2K, 0\end{matrix}\right]$$

$$\mathcal{M}_Y(s) = {}_2F_1\left(K, 2K; K+\frac{1}{2}; -\frac{\Omega}{2}s\right)$$

여기서 $G^{m,n}_{p,q}[\cdot]$와 ${}_2F_1(\cdot,\cdot;\cdot;\cdot)$는 [4]에서 정의된 Meijer G-function과 Gauss hypergeometric function이다. 두 감마확률변수의 조화평균 $Y_m,\ m=1,\cdots,M$의 최대분포에 대한 확률변수 Z를 다음과 같이 정의한다.

$$Z \triangleq \max_{m\in\{1,\cdots,M\}} Y_m$$

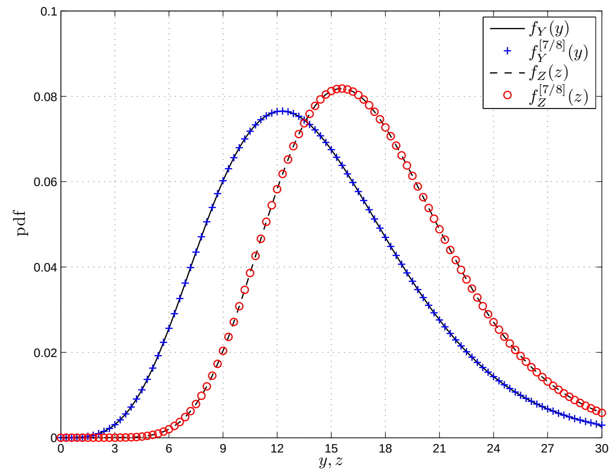

그림 1. 감마확률변수의 조화평균과 조화평균의 최대분포에 대한 pdf ($K = 4$, $\Omega = 4$, $N_p = 7$, $N_q = 8$).

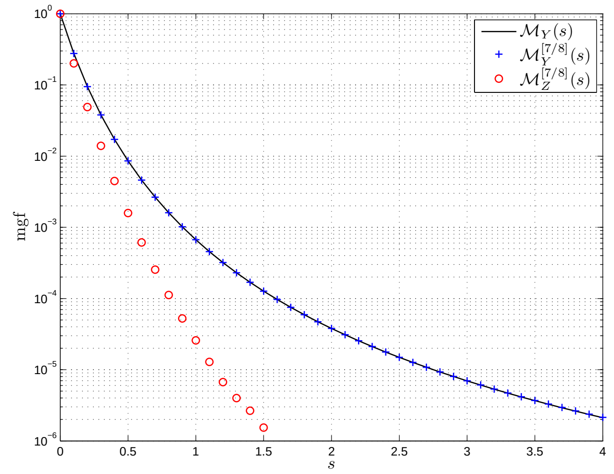

그림 2. 감마확률변수의 조화평균과 조화평균의 최대분포에 대한 mgf ($K = 4$, $\Omega = 4$, $N_p = 7$, $N_q = 8$).

3. PA를 이용한 근사적 최대분포

차수가 $[N_p/N_q]$인 PA는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$P^{[N_p/N_q]}(z) \triangleq \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_{N_p} z^{N_p}}{1 + b_1 z + \cdots + b_{N_q} z^{N_q}} = \sum_{j=0}^{N_p+N_q} c_j z^j + O\left(z^{N_p+N_q+1}\right)$$

이 논문에서는 $N_p = 7$과 $N_q = 8$인 경우만 고려한다. 만약 차수가 낮은 경우, y의 값이 작은 경우, pdf가 음의 값을 가질 수도 있다. 또한 mgf의 경우 큰 s에서 오차가 커질 수 있다. 이는 시간과 주파수 영역의 관계로부터 설명할 수 있다.

PA를 적용하여 조화평균의 최대분포를 구하는 과정은 다음과 같다.

1) Y의 mgf 혹은 moment를 이용하여 mgf에 대한 PA를 구한다. $\rightarrow \mathcal{M}_Y^{[N_p/N_q]}(s)$
2) $\mathcal{M}_Y^{[N_p/N_q]}(s)$를 역라플라스 변환을 통해, 근사적 pdf를 구한다. $\rightarrow f_Y^{[N_p/N_q]}(y)$
3) $f_Y^{[N_p/N_q]}(y)$를 적분하여 cdf $F_Y^{[N_p/N_q]}(y)$를 구한다.
4) 최대분포의 cdf는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F_Z^{[N_p/N_q]}(z) = \left[F_Y^{[N_p/N_q]}(y)\right]^M$$

5) 위의 cdf를 미분하여 다음과 같은 최대분포의 pdf를 구한다.

$$f_Z^{[N_p/N_q]}(z) = M f_Y^{[N_p/N_q]}(z) \left[F_Y^{[N_p/N_q]}(z)\right]^{M-1}$$

6) 위의 pdf에 대해 라플라스 변환을 취하면 감마확률변수의 조화평균에 대한 최대분포를 구할 수 있다.

$$\mathcal{M}_Z^{[N_p/N_q]}(s) = \mathcal{L}\left[f_Z^{[N_p/N_q]}(z)\right]$$

이론적으로 비슷한 과정으로 최대분포에 대한 mgf를 정확하게 구할 수 있지만, Meijer G-function의 곱에 대한 라플라스 변환은 매우 어려운 문제이다. 따라서 PA를 이용하여 근사적 분포를 얻는 것은 매우 유용하다.

그림 1와 2는 $K = 4$, $\Omega = 4$, $N_p = 7$, $N_q = 8$인 경우에 대한 감마확률변수의 조화평균과 조화평균의 최대분포에 대한 pdf와 mgf에 대한 결과이다. 그림 1은 pdf의 정확한 값과 PA를 이용하여 얻은 결과를 비교한 것이다. 위의 PA 기법은 mgf에 대해 '0' 부근에서 정확한 값을 가지므로 pdf는 값이 커질수록 정확하다. 일반적으로 차수가 낮으면 pdf의 '0' 부근에서 음의 값을 가질수도 있으므로, 가능한 한 PA의 차수가 높을수록 좋다.

그림 2는 $M = 2$일 때, PA 기법으로부터 구한 pdf를 라플라스 변환을 통해 구한 mgf를 나타낸다. 이러한 mgf는 SDF를 적용한 협력통신망의 릴레이 선택 기법의 성능 분석에 적용될 수 있다.

4. 감사의 글

본 연구는 2009년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국과학재단의 지원 [No. 2009-0081441]과 지식경제부 및 정보통신연구진흥원의 IT핵심기술개발사업의 일환으로 수행하였음 [2008-F-007-02, 3차원 환경에서의 지능형 무선통신 시스템].

5. 참고문헌

[1] 양재동, 송경영, 노종선, 신동준, "Alamouti 부호에 기반한 협력통신을 위한 연판정 후 전송 프로토콜," 제 19회 통신정보합동학술대회 (JCCI2009).

[2] M. O. Hasna and M.-S. Alouini, "Harmonic mean and end-to-end performance of transmission system with relays," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 52, no. 1, pp. 130–135, Jan. 2004.

[3] H. Amindavar and J. A. Ritcey, "Padé approximations of probability density functions," *IEEE Trans. Aero. Eletron. Syst.*, vol. 30, no. 2, pp. 416–424, Apr. 1994.

[4] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products,* 6th ed., Orlando, FL: Academic Press, 2002.