

직교 주파수 분할 다중화 시스템에서 첨두 전력의 분포에 대한 연구

*허석중⁰, *전현배, *김기훈, *노종선, **임대운, ***신동준

*서울대학교 전기컴퓨터공학부, 뉴미디어통신공동연구소

**동국대학교 정보통신공학부

***한양대학교 전자통신컴퓨터공학부

Research on Peak Power Distribution for OFDM System

*Seok-Joong Heo⁰, *Hyun-Bae Jeon, *Keehoon Kim, *Jong-Seon No, Dae-Woon Lim, and **Dong-Joon Shin

*Department of the EECS, INMC, Seoul National University

**Department of the ICE, Dongguk University

***Department of the ECE, Hanyang University,

{hsjbest, lucidream}@ccl.snu.ac.kr, jsno@snu.ac.kr, daewoonlim@gmail.com, djshin@hanyang.ac.kr

요약

본 논문에서는 부반송파의 수가 적은 직교 주파수 분할 다중화 (orthogonal frequency division multiplexing: OFDM) 시스템에서 첨두전력 대 평균전력의 비 (peak-to-average power ratio: PAPR)의 분포에 대해서 분석하였다. 기존에는 PAPR의 상보 누적함수 (complementary cumulative distribution function: CCDF)를 유도하는 과정에서 OFDM 심볼 내에서 신호의 샘플들의 power가 모두 독립이라고 가정하였으나 부반송파의 수가 적은 경우 모의실험을 통해 얻은 분포가 해석적으로 얻은 분포와 차이가 발생한다. 본 논문에서는 신호의 power들 간의 상관계수를 해석적으로 유도하였고 이것이 CCDF에 반영되어야 함을 보인다.

1. 개요

최근 무선 통신에서는 직교 주파수 분할 다중화 (orthogonal frequency division multiplexing: OFDM) 전송방식이 무선랜과 디지털 비디오 방송 (digital video broadcasting: DVB), 디지털 오디오 방송 (digital audio broadcasting: DAB)등의 핵심 기술로 이용되고 있다. OFDM은 주파수 선택적 페이딩에 강인하여 무선 환경에서의 고속 데이터 전송에 각광받고 있다. 그러나, OFDM은 첨두전력 대 평균전력의 비 (peak-to-average power ratio: PAPR)가 매우 크고 이것은 고전력 증폭기에서 대역내 왜곡과 대역외 방사와 같은 신호의 왜곡을 야기하므로 비트오류율 (bit error rate: BER)을 열화시킨다. 따라서, PAPR을 줄이는 연구는 OFDM 시스템을 연구하는데 있어 중요한 연구분야로 자리잡게 되었다.

본 논문에서는 성장도에 따라 결정되는 상관계수가 PAPR의 분포에 미치는 영향을 분석하고 있다. 본 논문은 2장에서 OFDM 시스템과 PAPR에 대해서 정의를 하고 3장에서는 상관계수를 유도하였다. 4장에서는 3장의 결과로부터 얻은 해석적인 결과와 모의실험으로 부터 얻은 결과를 비교하고 5장에서 결론을 내린다.

2. 시스템 모델과 첨두전력대 평균전력의 비

A. OFDM 시스템 모델

부 반송파가 N 개인 OFDM 시스템의 입력으로 $\mathbf{A} = [A_0 A_1 \cdots A_{N-1}]^T$ 가 입력 심볼 벡터로 주어지면 OFDM 신호 a_n 은 \mathbf{A} 의 역 푸리에 변환 (inverse discrete Fourier transform: IDFT)에 의해서 생성된다. a_n 은 연속시간 OFDM 신호를 Nyquist 율로 샘플링한 신호이고 실수부와 허수부를 각각 x_n, y_n 이라고 하면 a_n 은 다음과 같이 표현된다.

$$a_n = x_n + jy_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} A_k e^{j \frac{2\pi k}{N} n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1)$$

여기서, x_n 과 y_n 은 N 이 커지면 중심 극한 정리에 의해 평균이 0이고 분산이 σ^2 인 Gaussian 분포를 갖는다. 따라서, $|a_n|$ 은 Rayleigh 분포를 갖는 임의의 변수이며 이의 전력인 p_n 은 chi-square 분포를 갖는 임의의 변수이다. p_n 을 요소로 갖는 벡터 \mathbf{p} 는 $\mathbf{p} = [p_0 p_1 \cdots p_{N-1}]^T$ 와 같이 표현된다.

이산 시간 영역에서 OFDM 신호의 PAPR은 다음과

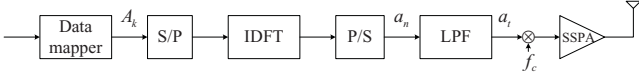


그림 1. OFDM system model.

같이 정의된다.

$$\text{PAPR}(a_n) \triangleq \frac{\max_{0 \leq n \leq N-1} |a_n|^2}{P_{av}(a_n)} \quad (2)$$

여기서, $P_{av}(a_n) = E[|a_n|^2]$ 는 $E[\cdot]$ 은 평균값을 나타낸다. 평균전력 P_{av} 이 1이라고 가정하면 a_n 의 PAPR은 $\text{PAPR}(a_n) = \max_{0 \leq n \leq N-1} |a_n|^2$ 로 간단하게 표현될 수 있다. PAPR이 주어진 임계치 γ_0 보다 클 확률은 [5]에 다음과 같이 유도되어 있다.

$$\Pr(\text{PAPR} > \gamma_0) = 1 - \left(\int_0^{\gamma_0} f(p_n) dp_n \right)^N = 1 - (1 - e^{-\frac{\gamma_0}{2}})^N \quad (3)$$

(3)에서 $f(\cdot)$ 는 chi-square 분포이다.

수식 (3)을 유도하는 과정에서는 p_n 과 $p_{n+\tau}$ 가 상호 독립으로 가정되었다. 그러나, $\text{cov}(p_n, p_{n+\tau})$ 값은 0이 아니며, 상관관계가 실제로 존재한다. 따라서, 다음 장에서는 상관관계의 정도를 나타내기 위해 상관계수를 정의하고 유도하였으며 N 이 작아질수록 상관계수가 증가함을 보였다. 따라서, N 이 작은 OFDM 시스템에서는 상관값을 고려하여 PAPR의 분포를 유도하는 것이 정확한 결과를 얻기 위해 필요하다.

3. 상관효과가 첨두 전력의 분포에 미치는 영향

두 랜덤 변수 x 와 y 의 평균이 $E[x]$ 와 $E[y]$ 이고 표준편차가 σ_x 와 σ_y 일 때 공분산 연산자가 $\text{cov}(\cdot, \cdot)$ 라고 표현되면 상관계수 ρ_{xy} 는 다음과 같이 정의된다.

$$\rho_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{E[xy] - E[x]E[y]}{\sqrt{(E[x^2] - E[x]^2)(E[y^2] - E[y]^2)}} \quad (4)$$

본 논문에서는 전력 변수간의 관계에 관심을 두고 있으므로 x 와 y 대신에 p_n 과 $p_{n+\tau}$ 를 변수로 고려하였다. 임의의 이산 시간 OFDM 신호의 각 요소 (component)가 갖는 전력은 다음과 같이 표현된다.

$$p_n = |a_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{h=0}^{N-1} A_k A_h^* e^{j \frac{2\pi(k-h)}{N} n}. \quad (5)$$

이때, 각 요소간의 상관계수는 다음과 같이 정의된다.

$$\rho_{p_n p_{n+\tau}} \triangleq \frac{E[p_n p_{n+\tau}] - E[p_n]E[p_{n+\tau}]}{\sqrt{(E[p_n^2] - E[p_n]^2)(E[p_{n+\tau}^2] - E[p_{n+\tau}]^2)}}. \quad (6)$$

즉, 수식 (6)에서 상관계수를 구하기 위해서는 $E[p_n p_{n+\tau}]$, $E[p_n^2]$ (= $E[p_{n+\tau}^2]$), $E[p_n]$ (= $E[p_{n+\tau}]$)를 구

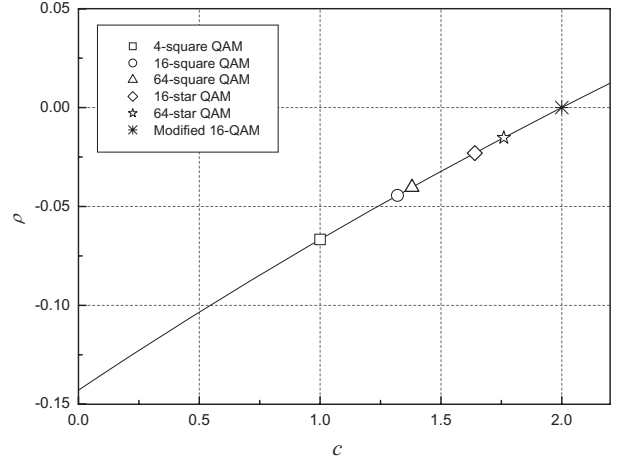


그림 2. 서로 다른 성상도에 대한 $\rho(\tau)$ 값, $N = 16$, $\tau \neq 0$.

해야 한다. p_n 과 $p_{n+\tau}$ 간의 자기상관값은 다음과 같이 정의된다.

$$E[p_n p_{n+\tau}] = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} E[A_k A_h^* A_l A_m^*] \cdot e^{j \frac{2\pi(k-h+l-m)}{N} n} e^{j \frac{2\pi(l-m)}{N} \tau}. \quad (7)$$

(7)에서 $E[A_k A_h^* A_l A_m^*]$ 는 i) $k = h = m = n$, ii) $k = h \neq m = n$, and iii) $k = n \neq h = m$ 에만 0이 아닌 값을 갖게 되므로 수식 (7)을 정리하면 다음과 같이 간단하게 표현된다.

$$E[p_n p_{n+\tau}] = \left(1 + \frac{1}{N^2} \left| \sum_{r=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi r}{N} \tau} \right|^2 \right) E[|A_k|^2]^2 + \frac{1}{N} \left(E[|A_k|^4] - 2E[|A_k|^2]^2 \right). \quad (8)$$

유사한 과정으로 $\tau = 0$ 일 때, $E[p_n^2]$ (= $E[p_{n+\tau}^2]$)를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$E[p_n^2] = 2E[|A_k|^2]^2 + \frac{1}{N} \left(E[|A_k|^4] - 2E[|A_k|^2]^2 \right) \quad (9)$$

평균 전력은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E[p_n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} E[|A_k|^2] = P_{av} \quad (10)$$

(8)-(10)로부터 상관계수 값은 다음과 같이 표현된다.

$$\rho_{p_n p_{n+\tau}} = \frac{\frac{1}{N} \left| \sum_{r=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi r}{N} \tau} \right|^2 E[|A_k|^2]^2 + \left(E[|A_k|^4] - 2E[|A_k|^2]^2 \right)}{NE[|A_k|^2]^2 + \left(E[|A_k|^4] - 2E[|A_k|^2]^2 \right)}. \quad (11)$$

$\rho_{p_n p_{n+\tau}}$ 를 $\rho(\tau)$ 로 표현하고 $E[|A_k|^4]/E[|A_k|^2]^2$ 를 c 로 치환한다면 (11)는 다음과 같이 간단하게 표현된다.

$$\rho(\tau) = \frac{\frac{1}{N} \left| \sum_{r=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi r}{N} \tau} \right|^2 + (c - 2)}{N + (c - 2)}. \quad (12)$$

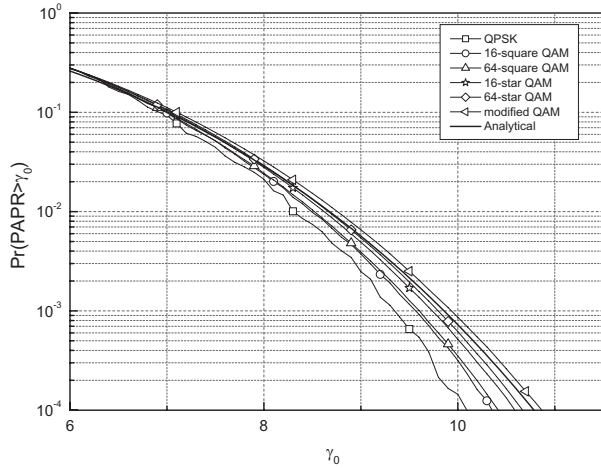


그림 3. $N = 16$ 인 OFDM 신호의 서로 다른 성상도를 갖는 데이터로 변조된 경우 갖는 PAPR의 CCDF 비교.

c 값은 성상도에 따라서 다른 값을 갖게 되며 예를 들어 QPSK, 16-square QAM, 64-square QAM, 16-star QAM, 64-star QAM에 대해서 $\rho(\tau)$ 는 각각 $-0.067, -0.044, -0.040, -0.023, -0.015$ 와 같이 τ 와 상관없이 상수 값을 갖게 된다 ($\tau \neq 0$). 상관 값이 PAPR의 분포에 미치는 영향을 알아보기 위해 $\rho(\tau)$ 가 0이 아닌 τ 에 대해서 0이 되는 새로운 성상도를 $\{(\pm 0.5, \pm 0.5), (\pm 1.5, \pm 2), (\pm 2, \pm 1.5), (\pm 3.675, \pm 3.675)\}$ 같이 정의해 보았다. 여기서 c 값은 2가 되며 $\rho(\tau)$ 는 0이 된다. c 에 대한 상관값은 2에 표현되었다.

위와 같은 상관 관계가 존재함을 고려할 때 PAPR의 상보 누적함수 (complementary cumulative distribution function: CCDF)는 다음 수식과 같이 상관값을 고려하여 다변수 함수의 경우로 표현해야 한다.

$$\begin{aligned} \Pr(\text{PAPR} > \gamma_0) &= 1 - \left(\int_0^{\gamma_0} \cdots \int_0^{\gamma_0} f_p(p_0, \dots, p_{N-1}) dp_0 \cdots dp_{N-1} \right) \\ &= 1 - F_p(\underbrace{\gamma_0, \dots, \gamma_0}_N) \end{aligned} \quad (13)$$

4. 모의실험 결과

본 장에서는 앞에서 분석한 해석적인 결과들 모의 실험을 통해 얻은 결과와 유사한 경향을 갖는지 알아보았다. 부반송파의 갯수가 16인 OFDM 신호의 PAPR이 갖는 CCDF가 도시되었으며 (3)에서 해석적으로 얻은 결과와 비교 되었다. QPSK로 변조된 OFDM신호와 본 논문에서 비교를 위해 제안된 변형된 16-QAM과의 CCDF는 $\Pr(\text{PAPR} > \gamma_0) = 10^{-4}$ 에서 0.8 dB 정도 차이가 남을 알 수 있다. 또한, 변형된 16-QAM의 PAPR이 갖는 CCDF는 [5]가 제안한 심볼내의 모든 요소들이 상관관계가 없다는 가정하에 유도된 분포와 거의 일치함을 알 수 있다. 이 전장의 유도로부터 부반송파의 수가 작은 경우에는 (3)의 결과와 차이가 나지만 부반송파의

수가 증가할 수록 (3)의 결과와 일치하게 되는 것을 설명할 수 있다.

5. 결론

OFDM신호의 심볼내의 샘플링된 전력들이 갖는 상관관계들은 OFDM의 첨두전력의 분포에 영향을 미친다. 본 논문에서는 이러한 상관 관계가 어떠한 경향을 보이는지 상관계수를 수식적으로 유도함으로써 그 의미를 분석하였다. 모의실험 결과로부터 성상도에 따라 PAPR의 CCDF가 상관계수에 의해서 영향을 받는지를 확인 할 수 있다.

6. 감사의 글

본 연구는 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (No. 2010-0000867).

7. 참고문헌

- [1] M. Sharif, M. Gharavi-Alkhansari, and B. H. Khalaj, "On the peak to average power of OFDM signals based on oversampling," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 51, no. 1, pp. 72–78, Jan. 2003.
- [2] R. van Nee and A. de Wild, "Reducing the peak-to-average power ratio of OFDM," in *Proc. VTC'98*, May 1998, pp. 2072–2076.
- [3] Z. Cao, U. Tureli, and P. Liu, "Optimum subcarrier assignment for OFDMA uplink," in *Proc. ACSSC*, vol. 1, Nov. 2003, pp. 708–712.
- [4] J. Reig, "Multivariate Nakagami-m distribution with constant correlation model," *Int. J. Electron. Commun.*, vol. 63, no. 1, pp. 46–51, Jan. 2009.
- [5] S. H. Müller, R. W. Bäuml, R. F. H. Fischer, and J. B. Huber, "OFDM with reduced peak-to-average power ratio by multiple signal representation," *Ann. Telecommun.*, vol. 52, no. 1-2, pp. 58–67, Feb. 1997.
- [6] H. Ochiai and H. Imai, "On the distribution of the peak-to-average power ratio in OFDM signals," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, no. 2, pp. 282–289, Feb. 2001.
- [7] H. Ochiai, "Performance analysis of peak power and band-limited OFDM system with linear scaling," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 2, no. 5, pp. 1055–1065, Sep. 2003.
- [8] S.-J. Heo, H.-S. Joo, J.-S. No, D.-W. Lim, and D.-J. Shin, "Analysis of PAPR reduction performance of SLM schemes with correlated phase vectors," in *Proc. IEEE ISIT*, Jul., 2009, pp. 1540–1543.
- [9] S.-J. Heo, H.-S. Noh, J.-S. No, and D.-J. Shin, "A modified SLM scheme with low complexity for PAPR reduction of OFDM systems," *IEEE Trans. Broadcast.*, vol. 53, no. 4, pp. 804–808, Dec. 2007.