

최적의 상관 특성과 큰 선형 복잡도를 갖는 새로운 p -진 수열군

학생회원 장 지 용*, 김 영 식* 정희원 노 종 선* and Tor Helleseth**

New Family of p -ary Sequences with Optimal Correlation Property and Large Linear Span

Ji-Woong Jang*, Young-Sik Kim*, Jong-Seon No* , Tor Helleseth** *Regular Members*

요 약

홀수 소수 p 와 $n = (2m + 1) \cdot k$ 를 만족시키는 정수 n, m, k 에 대해, 이상적인 자기상관 특성을 갖는 Helleseth-Gong 수열을 이용하여 수열군의 크기가 p^n 이고 주기가 $p^n - 1$ 인 최적의 상관 특성을 갖는 p 진 수열군을 생성한다. 즉, 수열군 내의 서로 다른 수열간의 최대 상관값 R_{\max} 가 Welch의 하한 측면에서 최적의 상관값인 $p^{m/2} + 1$ 을 넘지 않는다. 또한, 새로운 수열군의 선형 복잡도는 수열군 내의 m -수열을 제외하면 $(m + 2) \cdot n$ 이 된다.

ABSTRACT

For an odd prime p and integer n, m and k such that $n = (2m + 1) \cdot k$, a new family of p -ary sequences of period $p^n - 1$ with optimal correlation property is constructed using the p -ary Helleseth-Gong sequences with ideal autocorrelation, where the size of the sequence family is p^n . That is, the maximum nontrivial correlation value R_{\max} of all pairs of distinct sequences in the family does not exceed $p^{m/2} + 1$, which means the optimal correlation property in terms of Welch's lower bound. It is also derived that the linear span of the sequences in the family is $(m + 2) \cdot n$ except for the m -sequence in the family.

I. 서 론

코드분할 다중접속 방식(CDMA)의 통신 시스템에 있어 서명 수열은 각자의 사용자에게 할당되어 해당 사용자가 다른 사용자들과 구별 될 수 있게 하여준다. CDMA 시스템을 위한 수열의 작성시 가장 중요한 수열의 특성은 수열군의 크기가 커야 한다는 것과 수열군내의 다른 수열들과의 주기적 상관값이 작아야 한다는 것이다. 주어진 홀수 소수 p

에 대해, 주기가 $p^n - 1$ 인 p 진 수열군이 최적의 상관 특성을 가진다는 것은 수열의 위상이 맞지 않을 때의 자기 상관값과 수열군 내의 다른 수열과의 상호 상관값이 $R_{\max} = p^{m/2} + 1$ 을 넘지 않는다는 것이고, 이러한 특성을 갖는 수열들이 지금까지 연구되어 왔다. Sidelnikov는 최적의 상관 특성을 갖는 p 진 수열군을 제시하였으며, Kumar와 Moreno[3] 역시 최적의 상관 특성을 갖는 소수위상(prime-phase) 수열을 제시하였다. Liu와

* 서울대학교 전기컴퓨터공학부 부호 및 암호 연구실(jsno@snu.ac.kr).

** Department of Informatics, University of Bergen (Tor.Helleseth@ii.uib.no)

논문번호: #030219 0526. 접수일자: 2003년 5월 26일

※본 연구는 ITRC연구과제, BK21 및 Norwegian Research Council 지원으로 수행되었습니다.

Komol[7]는 alphabet 크기를 확장하여 최적의 상관특성을 갖는 p 진 Kasami수열을 제시하였다. p 진 bent 수열 역시 최적의 상관 특성을 갖는다.

표 3. 최적의 상관 특성을 갖는 주기가 $p^n - 1$ 인 p 진 수열군

수열군	n	family size	선형 복잡도	balance
새로운 수열	$(2m+1)k$	p^n	$n, (m+2)n$	No
Sidelnikov	even or odd	p^n	$n, 2n$	No
Kumar and Moreno	$(2m+1)k$	p^n	$n, 2n$	No
Kasami	even, $2m$	p^m	$\frac{3}{2}n$	No
bent. 수열	even, $2m$	p^m	*	Yes
Moriuchi 등	even, $2m$	p^m	*	Yes

* Moriuchi 등이 제시한 수열과 bent 수열의 선형 복잡도는 다른 수열군에 비하여 매우 크다.

Moriuchi와 Imamura는 Kumar와 Moreno가 제시한 bent 함수를 이용하여 최적의 상관 특성과 균형(balance) 특성을 갖는 p 진 수열을 제시하였다. 최적의 상관 특성을 갖는 p 진 수열군들을 표 1에 정리하였다. 수열군의 크기는 Sidelnikov의 수열과 Kumar와 Moreno의 수열이 표 1의 다른 수열군에 비하여 크지만 선형 복잡도는 다른 수열군에 비하여 매우 작다.

본 논문에서는 홀수 소수 p 와 $n = (2m+1) \cdot k$ 를 만족시키는 정수 n, m, k 에 대하여, 이상적인 자기 상관 특성을 갖는 Helleseth-Gong 수열을 이용해서 주기가 $p^n - 1$ 인 최적의 상관 특성을 갖는 p 진 수열군을 제시하였다. 본 논문의 수열군은 군의 크기가 p^n 이며, 상관 특성값의 크기가 $R_{max} = p^{n/2} + 1$ 을 넘지 않고 선형 복잡도는 같은 군 크기를 갖는 Sidelnikov의 수열군과 Kumar와 Moreno의 수열군 보다 큰 $(m+2) \cdot n$ 이다.

II. 사전지식

이제, 주어진 홀수 소수 p 에 대해 S 가 다음과

같이 주어지는 주기가 $N = p^n - 1$ 인 M 개의 p 진 수열들의 군이라 하자.

$$S = \{s_i(t) | 0 \leq i \leq M-1, 0 \leq t \leq N-1\}.$$

이 때, 수열군 S 의 두 수열 $s_i(t)$ 와 $s_j(t)$ 의 상관함수는 다음과 같이 주어진다.

$$R_{ij}(\tau) = \sum_{t=0}^{N-1} w^{s_i(t+\tau) - s_j(t)}$$

단, 위 식에서 w 는 원시 p 단위원이고, $0 \leq i, j \leq M-1, 0 \leq \tau \leq N-1$ 이다. 또한, 상관값의 최대 값은 다음과 같이 정의된다.

$$R_{max} = \max_{0 \leq i, j \leq M-1, 0 \leq \tau \leq N-1} |R_{ij}(\tau)|$$

단, 위 식에서 $i = j$ 이면서 $\tau = 0$ 인 경우는 제외된다. 이 때, 주기가 $p^n - 1$ 인 p 진 수열군의 R_{max} 가 $p^{n/2} + 1$ 을 넘지 않을 경우, 이를 최적화된 수열군이라 한다.

이제 정수 z 에 대해 V_z^n 이 정수의 z 에 대한 임의 집합 J_z 상의 n 차 벡터공간이라 하자. 또한, $w_z = e^{j\frac{2\pi}{z}}$, $j = \sqrt{-1}$ 이고 $f(x)$ 가 V_z^n 에서 J_z 로의 함수라 하자. 그러면 함수 $f(x)$ 의 Fourier 변환은 다음과 같이 정의된다.

$$F(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{z^n}} \sum_{x \in V_z^n} w_z^{f(x) - \Delta \cdot x^T}, \text{ all } \Delta \in V_z^n$$

단, x^T 는 x 의 전치(transpose)이다. 이 때, 일반화된 bent함수는 아래와 같이 정의된다.

정의 1.[Olsen, Scholtz 및 Kumar[4]] : V_z^n 에서 J_z 로의 함수 $f(\Delta)$ 가 임의의 $\Delta \in V_z^n$ 에 대해 Fourier 계수 $F(\Delta)$ 의 절댓값이 항상 1인 경우 $f(x)$ 를 일반화된 bent함수라 한다. □

본 논문에서는 z 가 홀수 소수 p 인 경우만을 다

를 것이다. 따라서 V_β^n 은, β 개의 원소를 갖는 유한 체 F_β 상의 n 차 벡터공간이고 $f(x)$ 는 V_β^n 에서 F_β 로의 함수이다.

Olsen, Scholtz 및 Welch는 F_2 에서 F_2 로의 trace 변환을 소개하였다. 이 때, F_β 에서 F_β 로의 trace 변환은 다음과 같이 일반화 될 수 있다.

정의 2.[Olsen, Scholtz, 및 Welch[10]] : $f(x)$ 가 F_β 에서 F_β 로의 함수라 하면 $f(x)$ 의 trace 변환과 그 역변환은 다음과 같이 정의된다.

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\beta^n}} \sum_{x \in F_\beta} w^{f(x) - \text{tr}_1^*(\lambda x)},$$

all $\lambda \in F_\beta$

$$w^{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{\beta^n}} \sum_{\lambda \in F_\beta} F(\lambda) \cdot w^{\text{tr}_1^*(\lambda x)},$$

all $x \in F_\beta$.

□

이 때, F_β 의 원소 x 와 λ 는 V_β^n 의 원소 \underline{x} 와 $\underline{\lambda}$ 에 대해 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \Rightarrow \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \Rightarrow \underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

단, 위 식에서 x_i 와 λ_i 는 F_β 의 원소이고 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 는 F_β 상의 F_β 의 basis이다. 이제 F_β 의 원소 x 를 V_β^n 의 원소 \underline{x} 로 치환하면 F_β 에서 F_β 로의 함수 $f(x)$ 는 V_β^n 에서 F_β 로의 함수 $f(\underline{x})$ 가 된다. 또한, $f(x)$ 의 trace 변환 값과 그에 대응하는 함수 $f(\underline{x})$ 의 Fourier 변환 값이 같기 때문에 F_β 에서 F_β 로의 함수 $f(x)$ 가 bent함수라는 것과 그에 대응되는 V_β^n 에서 F_β 로의 함수 $f(\underline{x})$ 가 bent함수라는 것은 동치이다.

이제, e, k 가 $n = e \cdot k$ 를 만족시키는 정수라

하면 F_β 상의 F_β 의 basis $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_e\}$ 가 다음을 만족할 때 trace-orthogonal basis라 한다.

$$\text{tr}_k^n(a_i \alpha_j) = \begin{cases} a_i, & \text{if } i=j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

단, $a_i \in F_\beta$ 이다. 또한 임의의 양수 e 와 홀수 소수 β 에 대해 F_β 상의 F_β 의 trace-orthogonal basis가 항상 존재한다[13]. 그러므로 F_β 의 원소인 x 와 λ 는 다음과 같은 관계에 의해 V_β^n 의 원소인 \underline{x} 와 $\underline{\lambda}$ 로 대응시킬 수 있다.

$$x = \sum_{i=1}^e x_i \alpha_i \Rightarrow \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_e) \quad (1)$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^e \lambda_i \alpha_i \Rightarrow \underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_e) \quad (2)$$

단, x_i 와 λ_i 는 F_β 의 원소이다.

이 때 basis를 trace-orthogonal basis로 선택하면 다음의 관계를 얻는다.

$$\text{tr}_k^n(\lambda x) = \sum_{i=1}^e a_i \lambda_i x_i. \quad (3)$$

이제 $1 \leq i \leq e$ 에 대해 $\lambda_i' = a_i \lambda_i$ 라 하고 $\underline{\lambda}' = (\lambda_1', \lambda_2', \dots, \lambda_e')$ 이라하면 (3)식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\text{tr}_k^n(\lambda x) = \sum_{i=1}^e \lambda_i' x_i = \underline{\lambda}' \underline{x}^T.$$

이제 (1)과 (2)를 이용하여 F_β 에서 F_β 로의 함수 $f(x)$ 가 V_β^n 에서 F_β 로의 함수 $\text{tr}_k^n(f(\underline{x}))$ 와 대응된다 가정하면 정의 2의 trace 변환은 다음과 같이 중간계에서의 trace 변환으로 수정할 수 있다.

정의 3 : $n = e \cdot k$ 라 하고 $f(x)$ 가 V_β^n 에서 F_β 로의 함수라 하자. 이 때, $\text{tr}_1^k(f(\underline{x}))$ 의 trace 변환과 그 역변환은 다음과 같이 정의된다.

$$F_M(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{p^n}} \sum_{x \in V_p^e} w^{\text{tr}_1^k(f(x)) - \text{tr}_1^k(\lambda \cdot x^T)},$$

$$\text{all } \lambda \in V_p^e$$

$$w^{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{p^n}} \sum_{\lambda \in V_p^e} F_M(\lambda) \cdot w^{\text{tr}_1^k(\lambda \cdot x^T)},$$

$$\text{all } x \in V_p^e.$$

□

이 때, V_p^e 에서 F_p 로의 함수 $\text{tr}_1^k(f(x))$ 의 trace 변환이 그에 대응되는 F_p 에서 F_p 로의 함수 $\text{tr}_1^k(f(x))$ 의 trace 변환인 $F(\lambda)$ 와 아래와 같은 관계가 있다는 것은 자명하다.

$$F(\lambda) = F_M(\lambda').$$

즉, 함수 $\text{tr}_1^k(f(x))$ 의 trace 변환값의 집합과 그에 대응되는 함수 $\text{tr}_1^k(f(x))$ 의 trace 변환값의 집합은 같다. 따라서 함수 $\text{tr}_1^k(f(x))$ 또는 $\text{tr}_1^k(f(x))$ 의 trace 변환 값의 절대값을 1만 갖게 된다면, 함수 $\text{tr}_1^k(f(x))$ 와 $\text{tr}_1^k(f(x))$ 는 일련화된 bent 함수가 된다.

이제 $Q(x)$ 가 F_p 에서 F_p 로의 quadratic 함수라 하자. 이 때, (1)을 이용하면 quadratic 함수 $Q(x)$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Q(x) = \sum_{i=1}^e \sum_{j=1}^e b_{ij} x_i x_j. \tag{4}$$

단, $b_{ij} \in F_p$ 이다. Dickson[1]은 e 가 홀수인 경우 임의의 quadratic form이 선형변환에 의해 다음과 같은 canonical form으로 바뀔 수 있음을 보였다.

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{\rho} r x_i^2. \tag{5}$$

단, $\rho \leq e$ 이고, $r=1$ 이거나 F_p 상의 nonresidue 이다. 이 때, quadratic 함수 $Q(x)$ 의 rank는 ρ 이다. 또한, $Q(x)$ 의 rank와 그에 대응되는 함수 $Q(x)$ 의 rank가 같다는 것은 자명하다. 이제 정의 3으로부터 다음의 lemma들을 쉽게 유도 해낼 수 있다.

보조정리 4 : $\text{tr}_1^k(Q(x))$ 가 p 진 quadratic bent 함수라는 것과 V_p^e 에서 F_p 로의 quadratic 함수 $Q(x)$ 가 full rank e 를 갖는다는 것은 동치이다. □

Helleseth와 Gong은 Helleseth-Gong(HG) 수열이라 불리는 이상적인 자기상관 특성을 갖는 새로운 p 진 수열을 제시하였고 이는 다음 정리와 같다.

정리 5[Helleseth and Gong[2]] : n, m, k 가 $n = (2m+1) \cdot k$ 를 만족하는 양의 정수라 하고, s 는 $\text{gcd}(2m+1, 2) = 1$ 을 만족하는 $1 \leq s \leq 2m$ 인 정수라 하자. 또한, p 는 홀수 소수, a 는 F_p 의 원시원, $q = p^k$ 이고 $l = 0, 1, \dots, m$ 에 대해 $b_0 = 1, u_0 = b_0/2, u_l = b_{2l} = b_{2m+1-2l}$ 의 관계가 성립한다 하자. 이 때 다음과 같이 주어지는 주기가 $p^n - 1$ 인 Helleseth-Gong 수열은 이상적인 자기상관 특성을 갖는다.

$$s(t) = \text{tr}_1^n \left(\sum_{l=0}^m u_l \cdot a^{\frac{q^{2l+1}}{2} t} \right). \tag{6}$$

□

이제 $F_p^* = F_p \setminus \{0\}$ 이고 $x = a^t$ 라 하면 (6)의 Helleseth-Gong 수열은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\text{tr}_1^n \left(\sum_{l=0}^m u_l \cdot x^{\frac{q^{2l+1}}{2}} \right), \quad x \in F_p^*.$$

이 때, $h(x)$ 를 Helleseth-Gong 방정식이라 하고 다음과 같이 정의한다.

$$h(x) = \sum_{l=0}^m u_l \cdot x^{\frac{q^{2l+1}}{2}}, \quad x \in F_p^*.$$

그러면 (6)의 Helleseth-Gong 수열은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$s(t) = \text{tr}_1^n (h(a^t)), \quad 0 \leq t \leq p^n - 2.$$

Helleseth-Gong 수열은 다음과 같이 변형될 수 있다.

$$s_b(t) = \text{tr}_1^n(a^t) + \text{tr}_1^n(h(b \cdot a^{2t})) \quad (7)$$

$$= \text{tr}_1^n(a^t + \sum_{i=0}^m u_i \cdot b^{\frac{a^{2i}+1}{2}} \cdot a^{(a^i+1)t}).$$

단, $b \in F_{p^n}$ 이다. 이 때, (7)식이 주기가 $p^n - 1$ 인 수열임을 자명하다.

III. p -진 수열군의 새로운 생성법

(7)에서 정의한 새로운 p -진 수열을 이용하면, 다음과 같은 수열군의 크기가 p^n 이고 최적의 상관 특성을 갖는 새로운 p -진 수열군을 만들 수 있다.

정리 6 : $s_b(t)$ 가 (7)에서 정의된 p -진 수열이라 하면 다음과 같이 주어지는 p -진 수열군은 $R_{\max} = p^{2/n} + 1$ 인 최적의 상관 특성을 갖는다.

$$S = \{s_b(t) \mid b \in F_{p^n}, 0 \leq t \leq p^n - 2\}.$$

증명: 수열군 S 내의 두 수열 $s_{b_1}(t)$ 와 $s_{b_2}(t)$ 간의 상호상관 함수는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$R_{ij}(\tau) + 1 = \sum_{t=0}^{p^n-2} w^{s_{b_1}(t+\tau) - s_{b_2}(t)} + 1$$

$$= \sum_{x \in F_{p^n}} w^{\text{tr}_1^n(c \cdot x + h(b_1 \cdot x^2 \cdot x^2))} \cdot w^{-x - h(b_2 \cdot x^2)} \quad (8)$$

단, $c = a^\tau \in F_{p^n}$ 이다. 이 때, 증명은 다음과 같이 3가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

경우 (i) $c = 1, b_1 = b_2$:

이 경우 $R_{ij}(\tau) = p^n - 1$ 이라는 것은 자명하다.

경우 (ii) $c \neq 1, b_1 c^2 = b_2$:

이 경우 역시 $R_{ij}(\tau) = -1$ 이라는 것이 자명하다.

경우 (iii) $b_1 c^2 \neq b_2$:

본 논문에서는 $b_i = b_j = 0$ 는 생각하지 않는다. 또한, $b_i \neq 0$ 인 경우의 증명이 $b_j \neq 0$ 인 경우와 유사하므로 $b_j \neq 0$ 인 경우만 증명할 것이다.

$\frac{k}{n}$ 이 홀수 정수이므로 F_{p^n} 에서도

nonresidue는 F_{p^n} 에서도 nonresidue가 된다. 따라서 b_i 와 b_j 를 $b_i = \gamma_i a_i^2$ 과 $b_j = \gamma_j a_j^2$ 으로 쓸 수 있다. 단, $a_i, a_j \in F_{p^n}$ 이고 γ_i 와 γ_j 는 1 또는 F_{p^n} 상의 nonresidue이다. 이제 $b_j \neq 0$, 즉

$a_j \neq 0$ 라 가정하고 $u = \frac{a_j}{a_i} c, y = a_j x$ 라 하면

(8)의 상호상관 함수는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$R_{ij}(\tau) + 1 = \sum_{x \in F_{p^n}} w^{\text{tr}_1^n(h(\gamma_i \cdot a_i^2 c^2 \cdot x^2) - h(\gamma_j \cdot a_j^2 \cdot x^2))} \cdot w^{\text{tr}_1^n((c-1) \cdot x)}$$

$$= \sum_{y \in F_{p^n}} w^{\text{tr}_1^n(h(\gamma_i \cdot u^2 \cdot y^2) - h(\gamma_j \cdot y^2))} \cdot w^{\text{tr}_1^n\left(\frac{c-1}{a_i} \cdot y\right)}$$

위 식에 모든 $r \in F_{p^n}$ 에 대해 $h(rx) = rh(x)$ 임을 이용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$R_{ij}(\tau) + 1 = \sum_{y \in F_{p^n}} w^{\text{tr}_1^n(h(\gamma_i \cdot u^2 \cdot y^2) - h(\gamma_j \cdot y^2))} \cdot w^{\text{tr}_1^n\left(\frac{c-1}{a_i} \cdot y\right)} \quad (9)$$

$$= \sum_{y \in F_{p^n}} w^{\text{tr}_1^n(u^2(\gamma_i \cdot h(u^2 \cdot y^2) - \gamma_j \cdot h(y^2)))} \cdot w^{\text{tr}_1^n\left(\frac{c-1}{a_i} \cdot y\right)}$$

이제 $Q(y)$ 가 아래와 같이 정의되는 quadratic 함수라 하자.

$$\begin{aligned}
 Q(y) &= \text{tr}_k^n(\gamma_i \cdot h(u^2 \cdot y^2) - \gamma_j \cdot h(y^2)) \\
 &= \text{tr}_k^n \left(\sum_{i=0}^m u_i \cdot [\gamma_i \cdot u^{q^{2i+1}} - \gamma_j] \cdot y^{q^{2i+1}} \right) \\
 &= \gamma_j \cdot \text{tr}_k^n \left(\sum_{i=0}^m u_i \cdot \left[\frac{\gamma_i}{\gamma_j} \cdot u^{q^{2i+1}} - 1 \right] \cdot y^{q^{2i+1}} \right).
 \end{aligned}$$

그러면 (9)식은 정의 2에서 정의된 quadratic 함수 $\text{tr}_k^k(Q(y))$ 의 F_p 에서 F_p 로의 trace변환이 된다. 이 때, quadratic 함수 $\text{tr}_k^k(Q(y))$ 가 p 진 bent함수 이면 $|R_p(\tau) + 1| = p^{n/2}$ 가 된다. 정의 3과 사전정리 4로부터 $Q(y)$ 가 full rank를 갖는다면 $\text{tr}_k^k(Q(y))$ 가 bent함수가 됨을 알 수 있다. 그러므로 $Q(y)$ 의 rank가 full rank인 $2m+1$ 이 됨을 증명하는 것으로 충분하다.

모든 $y \in F_p$ 에 대해 $Q(y+z) = Q(y)$ 를 만족시키는 해 $z \in F_p$ 의 개수가 p^{2m+1-n} 일 때, quadratic 함수 $Q(y)$ 의 rank가 ρ 가 된다는 것은 이미 알려진 사실이다. 이제 $a_i = u_i \cdot \left[\frac{\gamma_i}{\gamma_j} \cdot u^{q^{2i+1}} - 1 \right]$ 이라 하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\text{tr}_k^n \left(\sum_{i=0}^m a_i \cdot (y+z)^{q^{2i+1}} \right) = \text{tr}_k^n \left(\sum_{i=0}^m a_i \cdot y^{q^{2i+1}} \right).$$

또한, 위 식은 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\text{tr}_k^n \left(\sum_{i=0}^m a_i \cdot (y^{q^{2i}} z + yz^{q^{2i}}) + \sum_{i=0}^m a_i \cdot z^{q^{2i+1}} \right) = 0.$$

위 식의 첫 번째 항에 $q^{2m+1-2i}$ 승을 해주면 다음을 얻게 된다.

$$\begin{aligned}
 \text{tr}_k^n \left(y \cdot \left[\sum_{i=0}^m a_i^{q^{2m+1-2i}} \cdot z^{q^{2m+1-2i}} + \sum_{i=0}^m a_i \cdot z^{q^{2i}} \right] \right. \\
 \left. + \sum_{i=0}^m a_i \cdot z^{q^{2i+1}} \right) = 0
 \end{aligned}$$

위 식은 다음과 동치이다.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^m a_i^{q^{2m+1-2i}} \cdot z^{q^{2m+1-2i}} + \sum_{i=0}^m a_i \cdot z^{q^{2i}} = 0 \quad (10) \\
 \text{tr}_k^n (a_i \cdot z^{q^{2i+1}}) = 0.
 \end{aligned}$$

이 때, (10)식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^m u_i \cdot \left\{ \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_j} \cdot u^{(q^{2i+1})} \cdot q^{2m+1-2i} - 1 \right) \cdot z^{q^{2m+1-2i}} \right. \\
 \left. + \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_j} \cdot u^{(q^{2i+1})} - 1 \right) \cdot z^{q^{2i}} \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

따라서 다음을 얻을 수 있다.

$$\sum_{i=0}^m b_i \cdot \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_j} \cdot u^{q^{2i+1}} - 1 \right) \cdot z^{q^{2i}} = 0$$

단, $u_0 = \frac{b_0}{2}$ 이고 $u_i = b_{2i} = b_{2m+1-2i}$ 이다. 따라서 $Q(y)$ 의 rank ρ 가 $2m+1$ 임을 보이기 위해 다음의 방정식이 $\frac{\gamma_i}{\gamma_j} \cdot \left(\frac{a_i}{a_j} \cdot c \right)^2 \neq 1$ 인 경우 $z=0$ 을 유일한 해로 가짐을 보여야 하는데 이는 [2]에서 이미 증명이 되었다.

$$\sum_{i=0}^m b_i \cdot \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_j} \cdot \left(\frac{a_i}{a_j} \cdot c \right)^{q^{2i+1}} - 1 \right) \cdot z^{q^{2i}} = 0.$$

또한 기본 조건들로부터 $\frac{\gamma_i}{\gamma_j} \cdot \left(\frac{a_i}{a_j} \cdot c \right)^2 \neq 1$ 은 자명하다. 따라서 정리6이 증명이 되었다. □

Kumar와 Moreno[3]는 full rank를 갖는 quadratic form의 Fourier 계수를 이용하여 그에 대응되는 수열군 내의 두 개의 수열간의 상관 값을 구함으로써 수열군 내의 수열들 간의 상관값의 분포를 구하였다. 본 논문의 정리 6에서 정의한 수열군의 상관값 분포와 그 증명 방식이 Kumar와 Moreno의 수열군의 그것과 같다는 것은 매우 흥미로운 사실이다.

Sidelnikov의 p 진 수열과 Kumar와 Moreno의 p 진 수열은 수열군 내의 m -s수열을 제외한 나머지 수열들의 선형복잡도가 $2n$ 이었다. 그러나 본 논문

의 정리 6에서 제안한 p -진 수열 $s_b(t)$ 의 선형복잡도는 다음 정리와 같이 구해진다.

정리 7 : $b \in F_{p^n}^*$ 에 대해 정리 6에서 정의된 수열 $s_b(t)$ 의 선형복잡도는 $(m+2) \cdot n$ 이다.

증명 :

$0 \leq i \leq m$ 과 (7)의 $d_i = q^{2i} + 1$ 에 대해 $\gcd(d_i, p^n - 1) = 2$ 임을 증명한다. 그러므로 a^{d_i} 이 F_{p^n} 의 어떠한 하위체에도 속하지 않음 역시 증명한다. 따라서 F_{p^n} 상에서 a^{d_i} 이 속한 coset의 크기는 n 이 되고 이는 a^{d_i} 에 대해서도 같다. 그러므로 $s_b(x)$ 의 선형복잡도는 $(m+2) \cdot n$ 이다. □

V. 결론

본 논문에서는 홀수 소수인 p 와 m, k 가 양의 정수 일 때, $n = (2m+1) \cdot k$ 인 n 에 대해서 최적의 상관 특성을 갖는 새로운 p -진 수열군을 제안하였다. 새로운 수열군은 최적의 상관 특성과 같은 크기를 갖는 기존의 p -진 수열군들에 비해 선형 복잡도가 최소 50%이상 증가하였다.

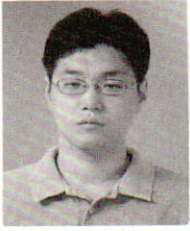
참고 문헌

[1] L.E. Dickson, *Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory*, Dover, New York 1958.
 [2] T. Helleseth and G. Gong, "New nonbinary sequences with ideal two-level autocorrelation function," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. , pp. 71-79, May 2002.
 [3] P.V. Kumar and O. Moreno, "Prime-phase sequences with periodic correlation properties better than binary sequences," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 37, pp. 603-616, May 1991.
 [4] P.V. Kumar, R.A. Scholtz and L.R. Welch, "Generalized bent functions and

their properties," *Journal of Combinatorial Theory*, Series A. vol. 40, pp. 90-117, 1985.
 [5] A. Lempel and M. Cohn, "Maximal families of bent sequences," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 38, pp. 865-868, Nov. 1982.
 [6] R. Lidl and H. Niederreiter, *Finite Fields*, vol 20 of Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Addison-Wesley, Reading, MA, 1983.
 [7] S. -C. Liu and J. F. Komo, "Nonbinary Kasami sequences over $GF(p)$," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 38, pp. 1409-1412, Jul. 1992.
 [8] F. J. McWilliams and N.J.A. Sloane, *The Theory of Error-Correcting Codes*, New York: North-Holland, 1977.
 [9] T. Moriuchi and K. Imamura, "Balanced nonbinary sequences with good periodic correlation properties obtained from modified Kumar-Moreno sequences," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 41, pp. 572-576, Mar. 1995.
 [10] J.D. Olsen, R.A. Scholtz and L.R. Welch, "Bent function sequences," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 28, pp. 858-864, Nov. 1982.
 [11] O.S. Rothaus, "On bent functions," *Journal of Combinatorial Theory*, Series A. vol. 20, pp. 300-305, 1976.
 [12] G. Seroussi and A. Lempel, "Factorization of symmetric matrices and trace-orthogonal bases in finite fields," *SIAM J. Comput.*, vol. 9, no. 4, pp. 758-767, Nov. 1980.
 [13] M.K. Simon, J.K. Omura, R.A. Scholtz and B.K. Levitt, *Spread Spectrum Communications*, vol. 1, Computer Science Press, Rockville, MD, 1985.
 [14] L.R. Welch, "Lower bounds on the maximal cross correlation of signals," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 20, pp. 396-399, May 1976.

장 지 웅(Ji-Woong Jang)

학생회원



2000년 2월 : 서울대학교 전기공학부 공학사
2002년 2월 : 서울대학교 전기컴퓨터공학부 공학석사
2002년 3월~현재 : 서울대학교 전기컴퓨터공학부 박사과정

<주관심분야> 시퀀스, 오류정정부호, 디지털 통신

김 영 식(Young-Sik Kim)

학생회원



2001년 2월 : 서울대학교 전기공학부 공학사
2003년 2월 : 서울대학교 전기컴퓨터공학부 공학석사
2003년 3월~현재 : 서울대학교 전기컴퓨터공학부 박사과정

<주관심분야> 시퀀스, 오류정정부호, 디지털통신

노 종 선(Jong-Seon No)

정회원



1981년 2월 : 서울대학교 전자공학과 공학사
1984년 2월 : 서울대학교 대학원 전자공학과 석사
1988년 5월 : University of Southern California, 전기공학과 공학박사

1988년 2월 ~ 1990년 7월 : Hughes Network Systems, Senior MTS

1990년 9월 ~ 1999년 7월 : 건국대학교 전자공학과 부교수

1999년 8월 ~ 현재 : 서울대학교 전기컴퓨터공학부 부교수

<주관심분야> 시퀀스, 오류정정부호, 시공간부호, 암호학, 이동통신

Tor Helleseth

1971년 : University of Bergen, Cand. Real degrees in mathematics

1979년 : University of Bergen, Dr. Philos. in mathematics

1973년 ~ 1980년 : Department of Mathematics in University of Bergen, Research Assistant

1981년 ~ 1984년 : Defense in Norway, Chief Headquarters

1984 ~ 현재 : Department of Informatics in University Bergen, Professor

<주관심분야> 시퀀스, 오류정정부호, 암호학,