

# 새로운 $p$ 진 Bent 수열의 생성

준회원 김 영 식, 장 지 웅, 종신회원 노 종 선\*

## New Constructions of $p$ -ary Bent Sequences

Young-Sik Kim, Ji-Woong Jang Associate Member, Jong-Seon No\* Life Members

### 요 약

본 논문에서는 소수  $p$ 에 대해 Kumar와 Moreno가 소개한 유한체 상에서 정의된 bent 함수를 이용하여 균형성과 최적의 상관성질을 갖는  $p$ 진 bent 수열군의 일반화된 생성방법을 소개한다[3]. 이렇게 생성된 수열군을 일반화된  $p$ 진 수열이라 부르기로 한다. Moriuchi와 Imamura가 [6]에서 소개한 균형성과 최적의 상관특성을 갖는  $p$ 진 수열군은 일반화된 bent 수열의 특별한 예임을 보인다.

### ABSTRACT

In this paper, using bent functions defined on the finite field we generalized the construction method of the family of  $p$ -ary bent sequences with balanced and optimal correlation property introduced by Kumar and Moreno for an odd prime  $p$ [3], called a generalized  $p$ -ary bent sequence. It turns out that the family of balanced  $p$ -ary sequences with optimal correlation property introduced by Moriuchi and Imamura [6] is a special case of the generalized  $p$ -ary bent sequences.

Key Words : bent sequences, bent functions, generalized bent sequences

### I. 서 론

Rothaus는  $m$ -tuple 이진 벡터공간에서  $\{0, 1\}$ 로의 사상(mapping)인 이진 bent 함수를 소개하였고 그 후 이진 bent 함수의 다양한 그룹들이 발견되어왔다[1][2][4]. Olsen, Scholtz, Welch는 이진 bent 함수를 이용하여 균형성을 갖고 Welch의 하한 값에 근사하는 상관값을 갖는 이진 bent 수열을 생성하였다[9]. Kumar, Scholtz, Welch는 이진에서  $q$ 진으로 문자의 크기를 확장하여  $q$ 진 벡터공간으로부터 modulo  $q$ 연산된 정수들의 집합으로의 사상인 일반화된 bent 함수를 소개하였다[4]. Kumar와 Moreno는 홀수 소수  $p$ 에 대해 이진 bent 수열의 생성법을  $p$ 진 bent 함수에 적용하여  $p$ 진 bent 수

열군을 정의하였다[3]. 또한, 이들은  $c|m$ ,  $b \in F_{p^m}^*$ 에 대하여  $\text{tr}_1^m(bx^{p^m+1})$ 로 정의되는  $p^m$ 개의 원소를 갖는 유한체  $F_{p^m}$ 상의 bent 함수를 정의하였는데, 이 bent 함수는 Moriuchi와 Imamura가 제안한 균형성과 최적의 상관 특성을 갖는  $p$ 진 수열의 생성에 이용된다[6].

본 논문에서는 홀수 소수  $p$ 에 대해 유한체에서 정의된 bent 함수를 이용하여 Kumar와 Moreno가 제안한 균형성과 최적의 상관 특성을 갖는  $p$ 진 bent 수열군의 생성법을 일반화시키고 이를 일반화된 bent 수열군이라 부를 것이다. 특히 Moriuchi와 Imamura가 제안한 균형성과 최적의 상관 특성을 갖는  $p$ 진 수열은 일반화된 bent 수열의 특별한 예임을 보인다.

\* 서울대학교 전기컴퓨터공학부 부호 및 암호 연구실(jsno@snu.ac.kr)

※본 연구는 ITRC연구과제, BK21의 지원으로 수행되었음.

논문번호: 030258 - 0618, 접수일자: 2003년 6월 18일

## II. 사전지식

홀수 소수  $p$ 에 대해  $S$ 가 다음과 같이 주어지는 주기가  $N = p^n - 1$ 인  $M$ 개의  $p$ 진 수열군이라 하자.

$$S = \{s_i(t) \mid 0 \leq i \leq M-1, 0 \leq t \leq N-1\}.$$

수열군  $S$ 의 원소인 수열  $s_i(t)$ 와  $s_j(t)$ 의 상관 함수는  $\omega = e^{j\frac{2\pi}{p}}$  일 때, 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$R_{i,j}(\tau) = \sum_{t=0}^{N-1} \omega^{s_i(t+\tau) - s_j(t)}. \quad (1)$$

여기서  $0 \leq i, j \leq M-1, 0 \leq \tau \leq N-1$ 이다. 위 식에서 상관값의 최대값은 다음과 같이 정의된다.

$$R_{\max} = \max_{0 \leq i, j \leq M-1, 0 \leq \tau \leq N-1} |R_{i,j}(\tau)|.$$

여기서  $i = j$ 이고  $\tau = 0$ 인 경우는 제외된다.

주기가  $p^n - 1$ 인  $p$ 진 수열군의  $R_{\max}$  값이  $p^{n/2} + 1$ 인 경우, 수열군이 최적의 상관 특성을 갖는다고 말한다.

이제  $z$ 가 정수이고  $V_z^m$ 이 modulo  $z$ 연산을 한 정수들의 집합  $J_z$ 상의  $m$ 차원 벡터공간이라 하자.

또한,  $\omega_z = e^{j\frac{2\pi}{z}}$ ,  $j = \sqrt{-1}$ 이고  $f(x)$ 가  $V_z^m$ 으로부터  $J_z$ 로의 함수라 하면 함수  $f(x)$ 의 푸리에 변환은 다음과 같이 정의된다.

$$F(\underline{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{z^m}} \sum_{x \in V_z^m} \omega_z^{f(x) - \underline{\lambda} \cdot x^T}, \text{ all } \underline{\lambda} \in V_z^m.$$

단, 위 식에서  $x^T$ 는  $x$ 의 전치이다. 이 때, 일반화된 bent 함수는 아래와 같이 정의된다.

**정의 1** [Kumar, Scholtz, Welch[4]] : 임의의  $\underline{\lambda} \in V_z^m$ 에 대해  $V_z^m$ 으로부터  $J_z$ 로의 함수  $f(x)$ 의 푸리에 계수가 항상 크기가 1일 때,  $f(x)$ 를 일반화된 bent 함수라 한다. □

본 논문에서는  $z$ 가 소수  $p$ 인 경우만 고려한다. 그러므로  $V_p^m$ 은  $p$ 개의 원소를 갖는 유한체  $F_p$ 상의  $m$ 차 벡터공간이 되고  $f(x)$ 는  $V_p^m$ 으로부터  $F_p$ 로의 함수가 된다.

이제  $F_{p^m}$ 이  $p^m$ 개의 원소를 갖는 유한체라 하고 정수  $e$ 와  $k$ 에 대해  $m = ek > 1$ 이라 하면  $F_{p^m}$ 에서 그 부분체  $F_{p^k}$ 로의 trace 함수  $\text{tr}_k^m(\cdot)$ 은  $\text{tr}_k^m(x) = \sum_{i=0}^{e-1} x^{p^{ki}}$ 로 정의된다[5]. 단,  $x$ 는  $F_{p^m}$ 의 원소이다.

Olsen과 Scholtz 그리고 Welch는  $F_{2^m}$ 에서  $F_2$ 로의 trace 변환을 소개하였다[7]. 이 때, 유한체  $p^m$ 개의 원소를 갖는  $F_{p^m}$ 으로부터  $F_p$ 로의 함수에 대한 trace 변환은 다음과 같이 일반화 될 수 있다.

**정의 2** [Olsen, Scholtz, Welch[7]] :  $f(x)$ 가  $F_{p^m}$ 에서  $F_p$ 로의 함수라 하면, 임의의  $\lambda \in F_{p^m}$ 에 대해  $f(x)$ 의 trace 변환과 그 역변환은 다음과 같이 정의된다.

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{p^m}} \sum_{x \in F_{p^m}} \omega^{f(x) - \text{tr}_1^m(\lambda x)},$$

$$\omega^{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{p^m}} \sum_{\lambda \in F_{p^m}} F(\lambda) \omega^{\text{tr}_1^m(\lambda x)}.$$

□

이제  $F_{p^m}$ 상에서 정의된 함수  $f(x)$ 가 trace 변환 계수의 크기로 1만을 가질 경우 이를 일반화된 bent 함수라 정의한다.

또한  $V_p^e$ 에서  $F_p$ 로의 함수  $f(x)$ 의 trace 변환 쌍은 다음과 같이 중간체에서 정의된 trace 변환으로 변형시킬 수 있다.

**정의 3** :  $m = ek$ 라 하고  $f(x)$ 가  $V_p^e$ 에서  $F_p$ 로의 함수라 하면,  $f(x)$ 의 변형된 trace 변환과 그 역변환은 아래와 같이 정의된다.

$$F_M(\underline{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{p^m}} \sum_{x \in V_p^e} \omega^{f(x) - \text{tr}_1^e(\underline{\lambda} \cdot x^T)},$$

$$\text{all } \underline{\lambda} \in V_p^e,$$

$$\omega^{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{p^m}} \sum_{\underline{\lambda} \in V_p^e} F_M(\underline{\lambda}) \omega^{\text{tr}_1^e(\underline{\lambda} \cdot x^T)},$$

$$\text{all } \underline{\lambda} \in V_p^e.$$

□

이제 다음 정리와 같이  $F_{p^m}$  상에서  $p$ 진 bent 함수를 생성할 수 있다[10].

**정리 1** [Kim, Jang, No, Helleseth[10]] :  $m=2k$  또는  $2k+1$ 이라 하고  $a_i \in F_p$ ,  $b \in F_{p^m}^*$ 라 하자. 또한,  $F_{p^m}$ 에서  $F_p$ 로의  $p$ 진 quadratic 함수  $f(x)$ 가 아래와 같이 정의된다 하자.

$$f(x) = \text{tr}_1^m \left( \sum_{i=0}^k a_i x^{1+p^i} \right). \quad (2)$$

이 때,  $f(x)$ 가 다음을 만족하면  $f(x)$ 는 bent 함수이다.

$$\sum_{i=0}^k a_i (\varepsilon^{il} + \varepsilon^{-il}) \neq 0,$$

for all  $l$ ,  $0 \leq l \leq m-1$ .

여기서 위 식에서  $\varepsilon = e^{j\frac{2\pi}{p^m}}$ 이다. □

### III. 새로운 $p$ 진 Bent 수열의 생성

Kumar와 Moreno는  $m$ 차  $p$ 진 벡터공간  $V_p^m$  상에서 정의된  $p$ 진 bent 함수를 이용하여 Olsen과 Scholtz, Welch가 제안한 이진 bent 수열을 다음과 같이  $p$ 진 bent 수열로 확장시켰다.

**정리 2** [Kumar, Moreno[3]] :  $p$ 가 홀수 소수이고  $m$ 은 정수,  $n=2m$ ,  $\alpha$ 는  $F_{p^m}$ 의 원시원이라 하자. 또한  $f(\cdot)$ 가  $V_p^m$ 상의 bent 함수이고  $\sigma \in F_{p^m} \setminus F_p$ 과  $F_p$ 상의  $F_{p^m}$ 의 기저  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ 에 대해,  $L(x) = (\text{tr}_1^n(\beta_1 \sigma x), \dots, \text{tr}_1^n(\beta_m \sigma x))$ 라 하자. 이 때  $\delta \in F_{p^m}^*$ 라 하면  $p$ 진 bent 수열군은 다음과 같이 정의된다.

$$S = \{s_\eta(t) \mid \eta \in F_{p^m}, 0 \leq t \leq p^n - 2\}$$

$$s_\eta(t) = f(L(\alpha^t)) + \text{tr}_1^n((\eta\sigma + \delta)\alpha^t).$$

여기서 수열군 내의 수열간의 상관값의 상한값은  $p^m + 1$ 이고  $|S| = p^m$ 이다. □

$p$ 진 bent 수열군의 생성을 다음과 같이 일반화할 수 있다.

**정리 3** :  $p$ 가 홀수 소수이고  $m, e, k$ 가 정수라 하

자.  $n=2m=2ek$ 이고  $a$ 가  $F_{p^e}$ 의 원시원이라고 하자. 그리고  $f(\cdot)$ 가  $V_{p^e}^e$ 에서 정의된  $p$ 진 bent 함수라 하자.  $L(x) = (\text{tr}_k^n(\beta_1 \alpha x), \text{tr}_k^n(\beta_2 \alpha x), \dots, \text{tr}_k^n(\beta_e \alpha x))$ 이고 여기서  $\sigma \in F_{p^e} \setminus F_{p^m}$ 이고  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_e\}$ 가  $F_{p^e}$ 상에서  $F_{p^m}$ 의 기저이다.  $\delta \in F_{p^m}^*$ 라 하자. 그러면 일반화된  $p$ 진 bent 수열군은 다음과 같이 정의된다.

$$S = \{s_\eta(t) \mid \eta \in F_{p^m}, 0 \leq t \leq p^n - 2\}$$

$$s_\eta(t) = f(L(\alpha^t)) + \text{tr}_1^n((\eta\sigma + \delta)\alpha^t).$$

여기서 이들 수열들의 상관값의 상한값은  $p^m + 1$ 이고  $|S| = p^m$ 이다. □

[9]의 이진 bent 수열의 증명과 유사한 방식으로, 정의 3에서 정의된 변형 trace 변환을 이용하여 위의 정리를 증명할 수 있다. 이는 다음의 보조정리로부터 출발한다.

**보조정리 1** : 양의 정수  $e$ 와  $m$ ,  $k$ 에 대해  $n=2m=2ek$ 라 하고  $L(x)$ 가  $F_{p^e}$ 에서  $V_{p^e}^e$ 로의 선형 사상이라 하자. 또한  $f(x)$ 가  $V_{p^e}^e$ 에서  $F_p$ 로의 함수라 하면  $f(L(x))$ 의 trace 변환은 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{F}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \notin \text{range}(L^*) \\ p^{\frac{m}{2}} F_M(u), & \lambda \in \text{range}(L^*) \\ & L^*(u) = \lambda. \end{cases}$$

여기서  $F_M(u)$ 는 정의 3에서 정의된  $f(x)$ 의 변형 trace 변환이다.

**증명**) Trace 변환의 정의를 이용하면  $f(L(x))$ 의 trace 변환을 다음과 같이 나타낼 수 있음은 자명하다.

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{p^n}} \sum_{x \in F_{p^e}} \omega^{f(L(x)) - \text{tr}_1^n(\lambda x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{p^n}} \sum_{x \in F_{p^e}} \frac{1}{\sqrt{p^m}} \sum_{u \in V_{p^e}^e} F_M(u) \\ &\quad \times \omega^{\text{tr}_1^n(L(x) \cdot u^T) - \text{tr}_1^n(\lambda x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{p^{n+m}}} \sum_{u \in V_{p^e}^e} F_M(u) \sum_{x \in F_{p^e}} \omega^{\text{tr}_1^n(L(x) \cdot u^T) - \text{tr}_1^n(\lambda x)}. \end{aligned}$$

선형 사상  $L(x)$ 의 수반식(adjoint)으로부터 다음

을 얻을 수 있다.

$$\text{tr}_1^k(L(x) \cdot \mathbf{u}^T) = \text{tr}_k^k(\text{tr}_k^n(xL^*(\mathbf{u}))).$$

그러므로 함수  $f(L(x))$ 의 trace 변환은 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$F_M(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{p^{n+m}}} \sum_{\mathbf{u} \in V_p^n} F_M(\mathbf{u}) \times \sum_{x \in F_p} \omega^{\text{tr}_1^k((L^*(x)-\lambda)x)}$$

$\lambda = L^*(x)$ 인 경우 위 식의 두 번째 합이  $p^n$ 이고, 그 이외의 경우 0이 되는 것은 자명하다. 그러므로  $\lambda \in \text{range}(L^*)$ 인 경우 다음을 유도할 수 있다.

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{p^{n+m}}} p^n F_M(\mathbf{u}), \text{ when } \lambda = L^*(\mathbf{u}) \\ = p^{\frac{m}{2}} F_M(\mathbf{u}).$$

또한,  $\lambda \notin \text{range}(L^*)$ 인 경우  $\lambda = L^*(\mathbf{u})$ 를 만족시키는  $\mathbf{u}$ 가  $V_p^n$ 상에 존재하지 않으므로  $F(\lambda) = 0$ 가 된다. □

이제 선형 사상  $L(x)$ 의 정의로부터 임의의  $\mathbf{u} \in V_p^n$ 에 대해 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$L(x) \cdot \mathbf{u}^T = \text{tr}_k^n(\zeta \alpha x).$$

여기서  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ 이고  $\zeta = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i$ 이다. 이 때,  $\mathbf{u}$ 가  $V_p^n$ 상의 모든 원소를 거처가는 동안  $\zeta$ 가  $F_{p^n}$ 의 모든 원소를 거친다는 것은 자명하다. 즉, 다음이 성립한다.

$$\{\zeta | \mathbf{u} \in V_p^n\} = F_{p^n}.$$

그러므로  $L^*$ 의 치역(range)은 다음과 같다.

$$\text{range}(L^*) = \{\zeta \sigma | \zeta \in F_{p^n}\}. \quad (3)$$

**정리 3의 증명)**  $s_\gamma(x)$ 의 trace 변환은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\widehat{S}_\gamma(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{p^n}} \sum_{x \in F_p} \omega^{f(L(x)) - \text{tr}_1^k((\lambda - \eta\sigma - \delta)x)}$$

보조정리 1를 이용하여 위의 trace 변환을 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$\widehat{S}_\gamma(\lambda) = \begin{cases} p^{\frac{m}{2}} F_M(\mathbf{u}), & \text{for } \lambda - \eta\sigma - \delta \in \text{range}(L^*) \\ & : L^*(\mathbf{u}) = \lambda - \eta\sigma - \delta, \\ 0, & \text{for } \lambda - \eta\sigma - \delta \notin \text{range}(L^*). \end{cases}$$

단, 위 식에서  $F_M(\mathbf{u})$ 는  $f(x)$ 의 변형된 trace 변환이다. (3)식으로부터  $L^*$ 의 치역은 아래와 같은 특성을 갖는다.

$$\begin{aligned} \text{range}(L^*) &= \{\zeta \sigma | \zeta \in F_{p^n}\} + \eta\sigma + \delta \\ &= \{\zeta \sigma | \zeta \in F_{p^n}\} + \delta \\ &= \text{range}(L^*) + \delta \\ &= \{\zeta \sigma + \delta | \zeta \in F_{p^n}\}. \end{aligned}$$

이제 집합  $H$ 가 아래와 같이 정의된다고 하자.

$$H = \text{range}(L^*) + \eta\sigma + \delta = \{\zeta \sigma + \delta | \zeta \in F_{p^n}\}.$$

그러면 집합  $H$ 는 수열군  $S$ 에 속한 모든 수열에 대해 닫힌다.

$w \in F_{p^n}$ 에 대해서 방정식  $x^2 + x + w = 0$ 가  $\sigma_0 \in F_{p^n} \setminus F_p$ 인  $\sigma_0$ 를 근으로 갖고,  $\sigma_0$ 는  $F_{p^n}$ 상에서  $F_p$ 을 생성시킨다는 것은 잘 알려진 사실이다. 즉 다음이 성립한다.

$$F_{p^n} = \{\phi \sigma_0 + \psi | \phi, \psi \in F_p\}.$$

그러므로  $\alpha^T$ 는  $\alpha^T = \phi \sigma_0 + \psi$ 로 대신 할 수 있다. 이제  $H \cap H\alpha^T$ 의 원소인  $z$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$z = \zeta_1 \sigma_0 + \delta.$$

이를 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} z &= \alpha^T(\zeta_2 \sigma_0 + \delta) \\ &= (\phi \sigma_0 + \psi)(\zeta_2 \sigma_0 + \delta) \\ &= \phi \zeta_2 \sigma_0^2 + (\phi \delta + \psi \zeta_2) \sigma_0 + \psi \delta \\ &= (-\phi \zeta_2 + \phi \delta + \psi \zeta_2) \sigma_0 \\ &\quad + \psi \delta - \phi \zeta_2 w. \end{aligned}$$

이러한 식의 표현의 유일성으로부터 아래와 같은 결론을 얻을 수 있다.

$$\zeta_1 = -\phi \zeta_2 + \phi \delta + \psi \zeta_2,$$

$$\delta = \psi \delta - \phi \zeta_2 w.$$

이 때,  $\phi \neq 0$ 이면 두 번째 식은  $\zeta_2$ 에 대하여 풀리게 되어서 첫 번째 식에서의  $\zeta_1$ 의 값을 구할 수 있다. 그러므로  $\phi \neq 0$ 인 경우  $|H \cap H\alpha^T| = 1$ 이 성립한다. 또한,  $\phi = 0$ 인 경우  $\delta \neq 0$ 이므로 근

이 존재하려면  $\phi$ 는 1이어야만 한다. 즉,  $\alpha^r = 1$ 이 되어야 하는데 이는  $\alpha$ 가 원시원이고  $0 < r < p^n - 2$ 라는 가정에 모순이 된다. 따라서  $\phi = 0$ 이면  $|H \cap Ha^r| = 0$ 이 된다. 그러므로  $1 \leq r \leq p^n - 2$ 와  $F_{p^n}$ 의 원시원  $\alpha$ 에 대해 다음이 성립함을 증명하였다.

$$|H \cap Ha^r| \leq 1. \quad (4)$$

또한 본 논문에서는  $F_M(\mathbf{u})$ 가 그 값으로 +1과 -1만을 취한다고 가정하였으므로 수열  $s_\eta(x)$ 의 trace 변환은 아래와 같이 주어진다.

$$\widehat{S}_\eta(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{for } \lambda \notin H \\ \pm p^{\frac{m}{2}}, & \text{for } \lambda \in H. \end{cases} \quad (5)$$

또한 (1)에 속하는 수열  $s_{\mathbf{y}}(x)$ 와  $s_{\mathbf{z}}(x)$ 간의 상관값은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$R_{yz}(\tau) = -1 + \sum_{x \in F_p} \omega^{s_{\mathbf{y}}(x) - s_{\mathbf{z}}(x\alpha^\tau)}.$$

이제 정리 3을 다음의 두 가지 경우로 나누어 증명할 것이다.

i)  $\tau \neq 0$

Parseval의 정리와  $F_{p^n}$ 상의 원소  $x$ 로 나타낸 수열의 표현을 이용하면 상관함수는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$R_{yz}(\tau) = -1 + \sum_{\lambda \in F_p} \widehat{S}_{\mathbf{y}}(\lambda) \widehat{S}_{\mathbf{z}}^*(\lambda \alpha^\tau).$$

(4)와 (5)로부터 상관 함수는 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$R_{yz}(\tau) = -1 \pm p^{\frac{m}{2}} p^{\frac{m}{2}} |H \cap Ha^r| = \begin{cases} -1, & \text{for } |H \cap Ha^r| = 0 \\ -1 \pm p^m, & \text{for } |H \cap Ha^r| = 1. \end{cases}$$

ii)  $\tau = 0$  and  $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$

이 경우  $\eta = \sum_{i=1}^m \beta_i (y_i - z_i) \neq 0$ 이므로, 상관함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} R_{yz}(0) &= \sum_{\alpha^i=0}^{p^n-2} \omega^{\text{tr}_1^*(L(\alpha^i) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z})^\tau)} \\ &= \sum_{\alpha^i=0}^{p^n-2} \omega^{\text{tr}_1^*(\eta \alpha^i)} \\ &= -1. \end{aligned}$$

그러므로 수열군  $S$ 의 상관특성에 대한 증명이

되었다.  $\square$

이제 정리 1에서 정의된  $F_{p^n}$ 상의  $p$ 진 bent 함수를 이용하면  $p$ 진 bent 수열 역시 다음과 같이 생성할 수 있다.

**정리 4 :**  $n = 2m$ 이고  $m = 2k$  또는  $2k + 1$ ,  $a_i \in F_p$ 이라 하자. 또한  $\sigma \in F_{p^m} \setminus F_{p^{m/2}}$ 이고  $\eta \in F_{p^m}$ ,  $\delta \in F_{p^{m/2}}$ 라 하자. 이 경우 (2)에서 정의된  $F_{p^n}$ 에서  $F_p$ 로의 quadratic  $p$ 진 bent 함수  $f(\cdot)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$f(x) = \text{tr}_1^m \left( \sum_{i=0}^k a_i x^{1+p^i} \right).$$

이 때,  $p$ 진 bent 수열군은 아래와 같이 정의된다.

$$S = \{s_\eta(t) \mid \eta \in F_{p^m}, 0 \leq t \leq p^n - 2\}$$

$$\begin{aligned} s_\eta(t) &= \text{tr}_1^m \left( \sum_{i=0}^k a_i [\text{tr}_m^n(\sigma \alpha^t)]^{1+p^i} \right) \\ &\quad + \text{tr}_1^n((\eta \sigma + \delta) \alpha^t). \end{aligned}$$

$\square$

Kumar와 Moreno에 의해 정의된  $p$ 진 bent 수열 [3]을 이용하여 Moriuchi와 Imamura는 다음과 같이 주어지는 균형성과 최적의 상관특성을 갖는  $p$ 진 수열군을 제시하였다.

$$\begin{aligned} s_\eta(t) &= \text{tr}_1^k (b [\text{tr}_k^n(\sigma \alpha^t)]^{p^n+1}) \\ &\quad + \text{tr}_1^n((\eta \sigma + \delta) \alpha^t). \end{aligned}$$

그러나 위의 수열은 정리 3에서 정의된 일반화된  $p$ 진 bent 수열의 특별한 경우로  $f(\cdot)$ 가 Kumar와 Moreno가 제시한  $p$ 진 bent 수열인 경우이다.

수열의 주기가 커짐에 따라서 정리 2에서 정의한  $p$ 진 bent 수열의 항의 수가 늘어나는 것은 자명한 일이지만, 정리 3에서 정의한 수열의 경우에는 그렇지 않다. 또한 이전 bent 수열의 경우  $n$ 이 4의 배수인 경우에만 존재하는 것으로 알려져 있으나  $p$ 진 bent 수열의 경우 모든 짝수  $n$ 에 대해 존재한다.

### 참 고 문 헌

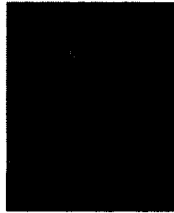
[1] C. Carlet, "Two new classes of bent functions," In *Proc. EURO-CRYPT'93*

(Lecture Notes in Computer Science 765), pp. 77-101, 1994.

- [2] J.F. Dillon, "Elementary Hadamard difference sets," Ph.D. dissertation, University of Maryland, 1974.
- [3] P.V. Kumar and O. Moreno, "Prime-phase sequences with periodic correlation properties better than binary sequences," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 37, pp. 603-616, May 1991.
- [4] P.V. Kumar, R.A. Scholtz and L.R. Welch, "Generalized bent functions and their properties," *Journal of Combinatorial Theory*, Series A. vol. 40, pp. 90-107, 1985.
- [5] R. Lidl and H. Niederreiter, *Finite Fields*, vol. 20 of Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Addison-Wesley, Reading, MA, 1983.
- [6] T. Moriuchi and K. Imamura, "Balanced nonbinary sequences with good periodic correlation properties obtained from modified Kumar-Moreno sequences," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 41, pp. 572-576, Mar. 1995.
- [7] J.D. Olsen, R.A. Scholtz and L.R. Welch, "Bent function sequences," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol 28, pp. 858-864, Nov. 1982.
- [8] O.S. Rothaus, "On bent functions," *Journal of Combinatorial Theory*, Series A. vol. 20, pp. 300-305, 1976.
- [9] L.R. Welch, "Lower bounds on the maximal cross correlation of signals," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol 20, pp. 396-399, May 1976.
- [10] Young-Sik Kim, Ji-Woong Jang, Jong-Seon No, and Tor Helleseth, "On  $p$ -ary Bent Functions Defined on Finite Fields," *Mathematical Properties of Sequences and Other Combinatorial Structures, The Kluwer International Series in Engineering and Computer Science*, Kluwer Academic Publishers, pp. 65-76, 2003.

김 영 식(Young-Sik Kim)

준회원



2001년 2월 : 서울대학교 전기공학부 공학사  
 2003년 2월 : 서울대학교 전기컴퓨터공학부 석사  
 2003년 3월~현재 : 서울대학교 전기컴퓨터공학부 박사과정

<주관심분야> 시퀀스, 오류정정부호, 디지털통신

장 지 웅(Ji-Woong Jang)

준회원



2000년 2월 : 서울대학교 전기공학부 공학사  
 2002년 2월 : 서울대학교 전기컴퓨터공학부 석사  
 2002년 3월~현재 : 서울대학교 전기컴퓨터공학부 박사과정

<주관심분야> 시퀀스, 오류정정부호, 디지털 통신

노 종 선(Jong-Seon No)

종신회원



1981년 2월 : 서울대학교 전자공학과 공학사  
 1984년 2월 : 서울대학교 대학원 전자공학과 석사  
 1988년 5월 : University of Southern California, 전기공학과 공학박사

1988년 2월~1990년 7월 : Hughes Network Systems, Senior MTS

1990년 9월~1999년 7월 : 전국대학교 전자공학과 부교수

1999년 8월~현재 : 서울대학교 전기컴퓨터공학부 부교수

<주관심분야> 시퀀스, 오류정정부호, 시공간부호, 암호학, 이동통신