

BLLD 부호의 Mutual Information

정희원 김향란*, 양재동*, 송경영*, 종신회원 노종선*, 신동준**

The Mutual Information for Bit-Linear Linear-Dispersion Codes

Xianglan Jin*, Jae-Dong Yang*, Kyoung-Young Song* *Regular Members*,
 Jong-Seon No*, Dong-Joon Shin** *Lifelong Members*

요약

이 논문은 maximum a posteriori (MAP) 비트 검출(bit detection)의 비트 오류 확률 (bit error probability: BEP)과 비트 최소 평균 제곱 오류(bit minimum mean square error: bit MMSE)사이의 관계를 유도한다. BEP는 bit MMSE의 1/4 보다 크고 1/2보다 작음을 유도한다. 이 결론을 이용하면 bit-linear linear-dispersion (BLLD) 부호를 적용한 다중 입출력 (multiple-input multiple-output: MIMO) 통신 시스템에서 가우시안 채널의 mutual information의 미분 값의 하한과 상한을 BEP로부터 얻을 수 있고 나아가서 mutual information의 하한과 상한을 구할 수 있다.

Key Words: 비트 오류 확률 (BEP), bit-linear linear-dispersion (BLLD) codes, maximum a posteriori (MAP) 비트 검출, 최소 평균 제곱 오류 (MMSE), 다중 입출력 (MIMO), mutual information

ABSTRACT

In this paper, we derive the relationship between the bit error probability (BEP) of maximum a posteriori (MAP) bit detection and the bit minimum mean square error (MMSE), that is, the BEP is greater than a quarter of the bit MMSE and less than a half of the bit MMSE. By using this result, the lower and upper bounds of the derivative of the mutual information are derived from the BEP and the lower and upper bounds are easily obtained in the multiple-input multiple-output (MIMO) communication systems with the bit-linear linear-dispersion (BLLD) codes in the Gaussian channel.

I. 서론

오류 확률과 최소 평균 제곱 오류 (minimum mean square error: MMSE)는 통신시스템의 성능 분석에 있어 아주 중요한 성능기준으로 고려된다. 특히, 대부분의 디지털 통신시스템에서의 성능은 비트로 측정되고 따라서 비트 오류 확률 (bit error probability: BEP)과 메시지 비트의 MMSE는 더욱 중요해진다. 다중 입출력 (multiple-input multiple-output: MIMO)

통신시스템의 BEP는 폭 넓게 연구되어 왔으며 N. Chayat와 S. Shamai^[1]은 이진 대칭 분포 송신신호의 수신 단에서의 maximum-likelihood estimator의 평균 제곱 오류(mean square error)와 MMSE의 관계를 얻었다.

이와 더불어 mutual information도 통신시스템의 성능 측정에 이용된다. 하지만 MIMO 시스템의 mutual information을 구하기는 매우 어렵다. Telatar^[2], Foschini와 Gans^[3]는 가우시안 채널에서 MIMO 시

※ 본 연구는 교육인적자원부, 산업자원부, 노동부의 출연금으로 수행한 최우수실험실지원사업의 연구결과입니다.
 * 서울대학교 전기·컴퓨터공학부 및 뉴미디어통신공동연구소 (xianglan.jin, yjdong, sky6174)@ccl.snu.ac.kr, jsno@snu.ac.kr
 ** 한양대학교 전자전기컴퓨터공학부 (djshin@hanyang.ac.kr)
 논문번호 : KICS2007-06-254, 접수일자 : 2007년 6월 9일, 최종논문접수일자 : 2007년 10월 10일

스택의 용량 (즉 maximum mutual information)을 구하였고 Guo, Shamai와 Verdú^[4]는 가우시안 채널에서 mutual information과 MMSE 사이의 관계를 찾아냈다.

이 논문에서는 임의의 부호화와 변조 기법에 대해 maximum a posteriori (MAP) 비트 검출의 비트 오류 확률을 고려하는데 이를 그냥 BEP로 나타내고 비트를 추정하면서 발생하는 MMSE를 bit MMSE로 표시한다. 이 표기를 사용하여 BEP는 bit MMSE의 1/4보다 크고 bit MMSE의 1/2보다 작다는 결과가 유도된다. 이 결과로부터 BEP와 bit MMSE중에서 하나를 알면 다른 하나의 하한과 상한을 쉽게 구할 수 있다.

Bit-linear linear-dispersion (BLLD) 부호^[5]는 메시지 비트와 출력 부호어 사이에 선형관계가 존재한다. 위의 BEP와 bit MMSE사이의 관계와 [4]의 mutual information과 MMSE사이의 관계를 이용하여 BLLD 부호를 적용한 MIMO 시스템의 mutual information의 미분 값의 하한과 상한이 BEP로부터 유도된다. 위의 결과로부터 알 수 있는 바와 같이 BEP로부터 mutual information의 범위를 구할 수 있다.

이 논문에서는 다음과 같은 표기를 사용한다. 대문자는 행렬을 나타내고, 밑줄은 벡터를 표시하고, 강조 문자는 확률 변수를 의미한다. $(\cdot)^T$ 는 전치행렬을, $(\cdot)^\dagger$ 는 복소 공액 전치행렬을, $(\cdot)^*$ 는 복소 공액을 나타낸다. 또한 $\|\cdot\|$ 는 행렬의 Frobenius norms, $\text{vec}(\cdot)$ 는 주어진 행렬의 열벡터 화를 의미한다. 그리고 $\text{tr}(\cdot)$ 는 행렬의 대각 합을, $\text{Re}(\cdot)$ 와 $\text{Im}(\cdot)$ 는 각각 복소수의 실수부와 허수부를 나타내고 $E\{\cdot\}$ 는 확률 변수의 결합 분포에 대한 기대값을 의미한다.

이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. BEP와 bit MMSE 간의 관계가 II절에서 유도되고, III절에서는 BLLD 부호를 적용한 MIMO 시스템의 mutual information의 미분 값의 하한과 상한이 BEP로부터 유도된다. 마지막으로 IV절에서는 결론을 맺는다.

II. MAP 비트 검출의 BEP와 Bit MMSE

MIMO 통신시스템에서 송수신 안테나의 개수를 각각 L_t 와 L_r 이라 하자. $\mathbf{x}=[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{L_t}]^T$ 를 독립적인 비트 $\mathbf{x}_i \in \{-1, 1\}$ 로 이루어진 메시지 벡터라 하고 $f(\mathbf{x})$ 를 그 함수 값이 $L_t \times 1$ 열벡터인 전달사 함

수라 하자. 이 절에서는 채널 상태 정보를 수신 단에서 완벽히 안다고 가정한다. 이를 이용하여 MIMO 통신시스템의 출력 신호는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{y} = \sqrt{\rho} H \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{n} \quad (1)$$

여기서 H 는 결정된 $L_r \times L_t$ 채널 행렬을 나타내고, \mathbf{n} 은 0이 아닌 유한 전력을 갖는 원소들을 갖는 $L_r \times 1$ 열벡터이고 메시지 벡터 \mathbf{x} 와는 독립이다. 또한 ρ 는 신호 대 잡음비 (signal-to-noise ratio: SNR)를 나타낸다.

MAP 검출은 사후 확률 질량 함수 (posterior probability mass function)를 최대로 하는 다음과 같은 \tilde{x}_i 를 선택한다.

$$\tilde{x}_i = \arg \max_{x_i} P(\mathbf{x}_i = x_i | \mathbf{y} = \mathbf{y}), \quad i = 1, 2, \dots, L_t$$

이 논문에서는, x_i 는 이진 신호이고 MAP 비트 검출이 사용된다고 가정한다. 이를 이용하여 BEP는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_b(\rho) = \frac{1}{L_t} \sum_{i=1}^{L_t} \sum_{x_i \in \{\pm 1\}} P(x_i) P(\tilde{x}_i \neq x_i | x_i; \rho) \quad (2)$$

다음으로 새로운 성능 측정의 척도인 bit MMSE를 정의한다.

정의 1: Bit MMSE는 하나의 bit \mathbf{x}_i 를 추정하는데 사용되는 MMSE로서 다음과 같이 정의된다.

$$\text{bmmse}(\rho) = E\{\|\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{y}; \rho)\|^2\}$$

여기서 $\hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{y}; \rho)$ 는 bit MMSE의 추정치로서 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{y}; \rho) = E\{\mathbf{x}_i | \mathbf{y}; \rho\} = \sum_{x_i \in \{\pm 1\}} x_i P(x_i | \mathbf{y}; \rho) \quad \square$$

식 (1)에서 정의된 다중이진 입력들을 갖는 MIMO 시스템에서 bit MMSE는 다음과 같다.

$$\text{lmmse}(\rho) = \frac{1}{L_b} E\{\|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}; \rho)\|^2\}$$

여기서 $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}; \rho) = [\hat{\mathbf{x}}_1(\mathbf{y}; \rho), \hat{\mathbf{x}}_2(\mathbf{y}; \rho), \dots, \hat{\mathbf{x}}_{L_b}(\mathbf{y}; \rho)]^T$ 이다. 이를 이용하여 MIMO 시스템에 대한 BEP와 bit MMSE 간에 다음과 같은 관계가 유도될 수 있다.

정리 1: 식 (1)에서 정의된 MIMO 시스템에 대해 MAP 비트 검출의 BEP와 이진 메시지 벡터 \mathbf{x} 의 bit MMSE는 다음의 관계들을 갖는다.

$$\frac{1}{4} \text{lmmse}(\rho) < P_b(\rho) < \frac{1}{2} \text{lmmse}(\rho) \quad (3a)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} P_b(\rho) = \frac{1}{2} \lim_{\rho \rightarrow 0} \text{lmmse}(\rho) \quad (3b)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} P_b(\rho) = \frac{1}{4} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \text{lmmse}(\rho) \quad (3c)$$

증명: $R_j^i, j \in \{-1, 1\}$ 를 다음을 만족하는 \mathbf{y} 의 결정 영역이라 하자.

$$P(x_i = j | \mathbf{y} = \mathbf{y}; \rho) > P(x_i = -j | \mathbf{y} = \mathbf{y}; \rho)$$

그러면 식 (2)의 BEP는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} P_b(\rho) &= \frac{1}{L_b} \sum_{i=1}^{L_b} [P(x_i = 1)P(\mathbf{y} \in R_{-1}^i | x_i = 1; \rho) \\ &\quad + P(x_i = -1)P(\mathbf{y} \in R_1^i | x_i = -1; \rho)] \\ &= \frac{1}{L_b} \sum_{i=1}^{L_b} \left[\int_{R_{-1}^i} p(x_i = 1, \mathbf{y}; \rho) d\mathbf{y} \right. \\ &\quad \left. + \int_{R_1^i} p(x_i = -1, \mathbf{y}; \rho) d\mathbf{y} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

또한 bit MMSE 추정치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{y} = \mathbf{y}; \rho) &= E\{\mathbf{x}_i | \mathbf{y} = \mathbf{y}; \rho\} \\ &= \frac{p(x_i = 1, \mathbf{y}; \rho) - p(x_i = -1, \mathbf{y}; \rho)}{p(x_i = 1, \mathbf{y}; \rho) + p(x_i = -1, \mathbf{y}; \rho)}, \\ &i = 1, 2, \dots, L_b \end{aligned}$$

따라서 bit MMSE는 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{lmmse}(\rho) &= \frac{1}{L_b} \sum_{i=1}^{L_b} \int \frac{4p(x_i = 1, \mathbf{y}; \rho)p(x_i = -1, \mathbf{y}; \rho)}{p(x_i = 1, \mathbf{y}; \rho) + p(x_i = -1, \mathbf{y}; \rho)} d\mathbf{y} \\ &= \frac{4}{L_b} \sum_{i=1}^{L_b} \left[\int_{R_{-1}^i} \frac{p(x_i = 1, \mathbf{y}; \rho)p(x_i = -1, \mathbf{y}; \rho)}{p(x_i = 1, \mathbf{y}; \rho) + p(x_i = -1, \mathbf{y}; \rho)} d\mathbf{y} \right. \\ &\quad \left. + \int_{R_1^i} \frac{p(x_i = 1, \mathbf{y}; \rho)p(x_i = -1, \mathbf{y}; \rho)}{p(x_i = 1, \mathbf{y}; \rho) + p(x_i = -1, \mathbf{y}; \rho)} d\mathbf{y} \right] \\ &= \frac{4}{L_b} \sum_{i=1}^{L_b} \left[\int_{R_{-1}^i} \frac{p(x_i = 1, \mathbf{y}; \rho)}{1 + \frac{p(x_i = -1, \mathbf{y}; \rho)}{p(x_i = 1, \mathbf{y}; \rho)}} d\mathbf{y} \right. \\ &\quad \left. + \int_{R_1^i} \frac{p(x_i = -1, \mathbf{y}; \rho)}{1 + \frac{p(x_i = 1, \mathbf{y}; \rho)}{p(x_i = -1, \mathbf{y}; \rho)}} d\mathbf{y} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

이제 $p_- = p(x_i = -j, \mathbf{y}; \rho)$ 라 하고 $p_+ = p(x_i = j, \mathbf{y}; \rho)$ 하자. $R_j^i, j \in \{-1, 1\}$ 영역에서 $0 < p_-/p_+ < 1$ 이므로 다음과 같은 부등식을 얻는다.

$$\frac{1}{2} \int_{R_j^i} p_- d\mathbf{y} < \int_{R_j^i} \frac{p_-}{1 + \frac{p_-}{p_+}} d\mathbf{y} < \int_{R_j^i} p_- d\mathbf{y} \quad (6)$$

이를 식 (4)~(6)을 이용하여 표현하면 다음과 같은 부등식을 얻는다.

$$\frac{1}{4} \text{lmmse}(\rho) < P_b(\rho) < \frac{1}{2} \text{lmmse}(\rho)$$

ρ 가 0에 가까워질 때, p_-/p_+ 는 R_j^i 영역에서 1에 가까워진다. 또한 ρ 가 무한대로 갈 때, p_-/p_+ 는 R_j^i 영역에서 0에 근사한다. 이를 정리하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} P_b(\rho) = \frac{1}{2} \lim_{\rho \rightarrow 0} \text{lmmse}(\rho)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} P_b(\rho) = \frac{1}{4} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \text{lmmse}(\rho) \quad \square$$

$\rho = 0$ 일 때, $P_b(0) = 1/2$ 이고 $\text{lmmse}(0) = 1$ 이므로 BEP가 bit MMSE의 절반임을 확인하는 것은 쉽다. 정리 1로부터 BEP (혹은 bit MMSE)의 하한과 상한은 bit MMSE (혹은 BEP)로부터 유도될 수 있다. 정리 1에서 구해진 관계를 보여주는 두 가지의 간단한 예를 찾을 수 있다.

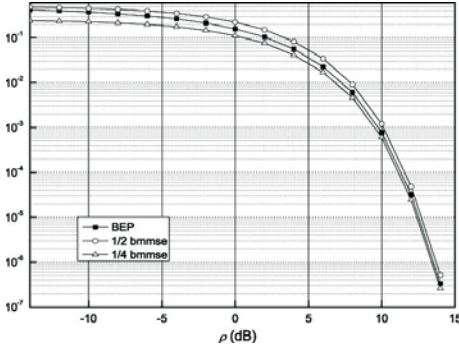


그림 1. 가우시안 채널에서 SISO 시스템에 대한 BEP와 bit MMSE 간의 관계

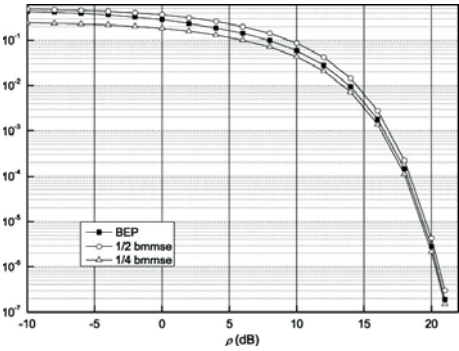


그림 2. 가우시안 채널에서 Gray 부호화된 16QAM SISO 시스템에 대한 BEP와 bit MMSE 간의 관계

첫째, 평균이 0이고 분산이 1인 가우시안 채널 $\mathbf{n} \sim N(0,1)$ 에서의 각 입력이 같은 확률로 발생하는 이진 메시지 비트가 입력인 단일 입출력 (single-input single-output: SISO) 시스템인 $\mathbf{y} = \sqrt{\rho}\mathbf{x} + \mathbf{n}$ 를 생각할 수 있다. 이 경우 bit MMSE 는 [4]에서 주어진 MMSE와 같다.

$$\text{bmmse}(\rho) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \tanh(\rho - \sqrt{\rho}y) dy$$

BEP는 $P_b(\rho) = Q(\sqrt{\rho})$ 로 주어진다. 여기서 $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ 이다. 그림 1은 이 SISO 시스템에 대한 BEP와 bit MMSE 간의 관계를 보여준다. 이로부터 정리 1에서의 부등식을 확인할 수 있다. 다음으로 또 다른 SISO 시스템 $\mathbf{y} = \sqrt{\rho}g(\mathbf{x}) + \mathbf{n}$ 을 고려한다. 여기서 $g(\cdot)$ 는 4 비트 메시지에 대한 복소 전달사 함수이고 Gray 부호화된 16QAM 사상기이다. 또한 \mathbf{n} 은 평균이 0이고 분산이 1인 복소수 가우시안 확률 변수이다. 평균 전송 전력을 1이라고

가정하여 Monte Carlo 방법의 모의실험을 통하여 그림 2에서와 같이 BEP와 bit MMSE의 값을 볼 수 있다. 이 사실 또한 정리 1의 관계를 만족함을 알 수 있다.

III. BLLD 부호의 Mutual Information

지금까지 MIMO 시스템의 BEP에 대한 많은 연구 결과들이 도출되었지만 MIMO 시스템에 대한 mutual information의 유도는 매우 어렵다. 이 절에서는 BLLD 부호가 사용될 때의 MIMO 통신시스템에 대한 mutual information의 미분 값의 하한과 상한을 구한다.

L_t 개의 송신안테나와 L_r 개의 수신안테나를 갖는 MIMO 시스템을 고려한다. $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{L_t \times T}$ 과 $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{L_r \times T}$ 을 각각 송수신 신호 행렬이라 하고, T 를 각 신호 행렬의 심볼 주기라 하자. 또한 $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{L_r \times L_t}$ 는 채널 행렬로서 수신 단에만 알려져 있다고 가정하고 T 심볼 주기의 블록 안에는 일정하고 블록들 간에는 독립적으로 변한다고 가정한다.

가우시안 채널에서의 MIMO 시스템은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{Y} = \sqrt{\rho}\mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{N} \quad (7)$$

여기서 \mathbf{N} 의 각 원소들은 평균이 0이고 각 차원당 0.5의 분산을 갖는 독립적이고 동일한 분포를 갖는 (i.i.d) 순환 대칭 복소 가우시안 확률 변수이다. \mathbf{H} 의 각 원소는 $\mathbf{h}_{i,j}$ 이고 마찬가지로 평균이 0이고 차원당 0.5의 분산을 갖는 i.i.d 순환 대칭 복소 가우시안 확률 변수이다.

[5]에서 정의된 BLLD 부호는 다음과 같다.

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{X} : \mathbf{X} = \sum_{k=1}^{L_b} x_k \mathbf{A}_k, x_k \in \{\pm 1\}, k = 1, \dots, L_b \right\} \quad (8)$$

여기서 $\mathbf{A}_k \in \mathbb{C}^{L_r \times L_t}$ 는 확산 행렬이고 메시지 비트 x_k 는 같은 확률로 발생한다.

$\mathbf{H}' = [\text{vec}(\mathbf{H}\mathbf{A}_1), \text{vec}(\mathbf{H}\mathbf{A}_2), \dots, \text{vec}(\mathbf{H}\mathbf{A}_{L_b})]$ 라 하고 $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{L_b}]^T$ 라 하자. 그러면 식 (7)의 MIMO 시스템은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\text{vec}(\mathbf{Y}) = \sqrt{\rho} \mathbf{H} \mathbf{x} + \text{vec}(\mathbf{N})$$

여기서 $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\text{vec}(\mathbf{Y})) \\ \text{Im}(\text{vec}(\mathbf{Y})) \end{bmatrix}$, $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\text{vec}(\mathbf{N})) \\ \text{Im}(\text{vec}(\mathbf{N})) \end{bmatrix}$ 그리고

$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{H}) \\ \text{Im}(\mathbf{H}) \end{bmatrix}$ 이라 하자. 이 표기를 사용하면 위의 시스템은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{y} = \sqrt{\rho} \mathbf{F} \mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (9)$$

이러한 시스템 모델은 정리 1에서 구한 BEP와 bit MMSE 사이의 관계를 만족한다.

$$\frac{1}{4} \text{limmse}_F(\rho) < P_b(\rho \mathbf{F} = F) < \frac{1}{2} \text{limmse}_F(\rho) \quad (10a)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} P_b(\rho \mathbf{F} = F) = \frac{1}{2} \lim_{\rho \rightarrow 0} \text{limmse}_F(\rho) \quad (10b)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} P_b(\rho \mathbf{F} = F) = \frac{1}{4} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \text{limmse}_F(\rho) \quad (10c)$$

여기서 $\text{limmse}_F(\rho) \triangleq \text{limmse}(\rho \mathbf{F} = F)$ 를 의미한다. $F \mathbf{x}$ 를 추정하는 MMSE는 $E\{\|F(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}; \rho))\|^2\}$ 이고 식 (9)에서 결정적인 F 에 대한 \mathbf{x} 와 \mathbf{y} 의 mutual information은 ρ 의 함수로서 다음과 같이 주어진다.

$$I(\mathbf{x}; \sqrt{\rho} \mathbf{F} \mathbf{x} + \mathbf{n} | \mathbf{F} = F) = I(\rho \mathbf{F} = F)$$

따라서 [4]로부터 단위가 비트인 mutual information과 $F \mathbf{x}$ 의 MMSE는 입력에 상관없이 다음의 관계를 만족시키는 것을 알 수 있다.

$$\frac{d}{d\rho} I(\rho \mathbf{F} = F) = E\{\|F(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}; \rho))\|^2\} \log_2 e \quad (11)$$

여기서는 잡음 벡터 \mathbf{n} 의 각 원소가 평균이 0이고 분산이 0.5인 가우시안 확률 변수이기 때문에 [4]의 관계식에서 MMSE 앞에 1/2이 없다. 식 (10)과 (11)을 이용하면 BLLD 부호를 사용한 MIMO 시스템의 mutual information과 BEP는 다음의 정리를 유도할 수 있다.

정리 2: $X = \sum_{k=1}^{L_b} x_k A_k$ 를 확산 행렬 $A_k \in \mathbb{C}^{L_t \times T}$,

$1 \leq k \leq L_b$ 에 대한 BLLD 부호라 하고 L_b 를 T 심볼 동안 전송된 메시지 비트의 개수라 하자. 확산 행렬 A_k 가 다음의 조건들을 만족한다고 가정하자.

$$A_i A_i^\dagger = C, \quad 1 \leq i \leq L_b \quad (12a)$$

$$A_i A_j^\dagger + A_j A_i^\dagger = 0, \quad 1 \leq i < j \leq L_b \quad (12b)$$

여기서 C 는 일정한 양의 준정부호 행렬이다. 식 (7)에서 결정된 행렬 $\mathbf{H} = H$ 로 한정하면 MIMO 시스템에 대해 \mathbf{X} 와 \mathbf{Y} 의 mutual information과 MAP 비트 검출에 대한 BEP 사이의 관계를 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$P_{\text{bound}} < \frac{d}{d\rho} I(\rho \mathbf{H} = H) < 2P_{\text{bound}} \quad (13a)$$

여기서 $P_{\text{bound}} \triangleq 2L_b \log_2 e \cdot \text{tr}(HCH^\dagger) P_b(\rho \mathbf{H} = H)$ 이다. 또한

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{d}{d\rho} I(\rho \mathbf{H} = H) = \lim_{\rho \rightarrow 0} P_{\text{bound}} \quad (13b)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{d}{d\rho} I(\rho \mathbf{H} = H) = 2 \lim_{\rho \rightarrow \infty} P_{\text{bound}} \quad (13c)$$

증명: 미리 정의된 F 와 \mathbf{x} 를 이용하면 $F \mathbf{x}$ 의 MMSE는 다음과 같이 주어진다.

$$E\{\|F(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\|^2\} = E\{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^\top F^\top F(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\}$$

행렬 F 가 다음의 조건을 만족하면

$$F^\top F = \lambda \mathbf{I}, \quad (14)$$

$E\{\|F(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\|^2\} = \lambda E\{\|(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\|^2\} = \lambda L_b \cdot \text{limmse}_F(\rho)$ 을 얻을 수 있다. 여기서 $\lambda > 0$ 이고 \mathbf{I} 는 항등 행렬을 나타낸다. 식 (10a)~(10c)와 (11)로부터 식 (13a)~(13c)에서의 mutual information과 BEP 사이의 관계를 얻는다. 따라서 식 (12a)와 (12b)가 만족될 때 식 (14)가 성립함을 보이면 된다. $F^\top F = \text{Re}(H^\dagger H)$ 이므로 $H^\dagger H$ 을 다음과 같이 생각할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 H^{\dagger} H' &= [\text{vec}(HA_1), \dots, \text{vec}(HA_{L_b})]^{\dagger} \\
 &\quad \cdot [\text{vec}(HA_1), \dots, \text{vec}(HA_{L_b})] \\
 &= \begin{bmatrix} (\text{vec}(HA_1))^{\dagger} \text{vec}(HA_1) & \dots & (\text{vec}(HA_1))^{\dagger} \text{vec}(HA_{L_b}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\text{vec}(HA_{L_b}))^{\dagger} \text{vec}(HA_1) & \dots & (\text{vec}(HA_{L_b}))^{\dagger} \text{vec}(HA_{L_b}) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \text{tr}(HA_1 A_1^{\dagger} H^{\dagger} H') & \dots & \text{tr}(HA_{L_b} A_1^{\dagger} H^{\dagger} H') \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{tr}(HA_1 A_{L_b}^{\dagger} H^{\dagger} H') & \dots & \text{tr}(HA_{L_b} A_{L_b}^{\dagger} H^{\dagger} H') \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

이 행렬에서 각 원소는 다음의 성질을 갖는다.

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(HA_i A_j^{\dagger} H^{\dagger} H') &= \text{tr}((HA_i A_j^{\dagger} H^{\dagger} H')^T) = \text{tr}(H^* A_j^* A_i^T H^T) \\
 &= [\text{tr}(HA_j A_i^{\dagger} H^{\dagger} H')]^*, \quad 1 \leq i < j \leq L_b
 \end{aligned}$$

따라서 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 &\text{Re} \{ \text{tr}(HA_i A_j^{\dagger} H^{\dagger} H') \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ \text{tr}(HA_i A_j^{\dagger} H^{\dagger} H') + \text{tr}(HA_j A_i^{\dagger} H^{\dagger} H') \} \\
 &= \frac{1}{2} \text{tr} \{ H(A_i A_j^{\dagger} + A_j A_i^{\dagger}) H^{\dagger} H' \}, \quad 1 \leq i < j \leq L_b
 \end{aligned}$$

식 (12a)와 (12b)로부터 $F^T F = \text{Re}(H^{\dagger} H')$ = $\text{tr}(HCH^{\dagger}) \cdot I$ 이므로 이 정리는 증명된다. □

정리 2로부터 조건 (12a)과 (12b)를 만족시키는 BLLD codes에 대하여 mutual information의 하한과 상한을 BEP로부터 쉽게 구할 수 있다는 것을 알 수 있다.

정리 2를 확인할 수 있는 두 가지 예는 다음과 같다. 첫째, BPSK나 QPSK를 사용한 단일 안테나 시스템을 고려한다. BPSK의 경우에 대해 $A = 1$ 이고 $AA^{\dagger} = 1$ 이고 QPSK의 경우에 대해 $A_1 = 1/\sqrt{2}$, $A_2 = j/\sqrt{2}$ 이고 $A_1 A_1^{\dagger} = 1/2$, $A_2 A_2^{\dagger} = 1/2$, $A_1 A_2^{\dagger} + A_2 A_1^{\dagger} = 0$ 이다.

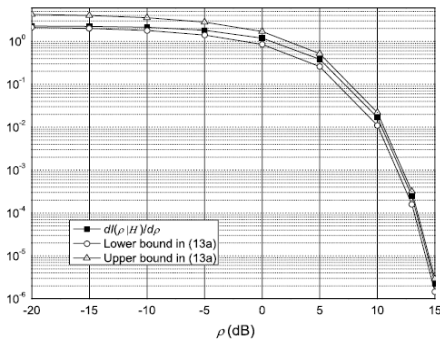


그림 3. QPSK 변조를 사용한 Alamouti STC에 대한 mutual information의 미분과 BEP 간의 관계

따라서 확산 행렬들이 정리 2의 식 (12a)와 (12b)의 조건들을 만족한다.

둘째, Kim, Kang과 No [6]에 의해 정의된 다음과 같이 표현할 수 있는 homogeneous 직교 시공간 블록 부호 (orthogonal space-time block code: OSTBC) \mathcal{L} 를 고려한다.

$$\mathcal{L} = \left\{ X: X = \sum_{k=1}^{L_b} x_k A_k \right\}$$

여기서 $x_k \in \mathbb{R}$, $A_k \in \mathbb{C}^{L_b \times T}$ 이고 $k = 1, 2, \dots, L_b$ 이다.

또한 $XX^{\dagger} = c \sum_{k=1}^{L_b} x_k^2 \cdot I$ 을 만족하는데 [7, II]에서 OSTBC의 성질로부터 이는 다음과 같은 결과와 등가하다는 것을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
 A_i A_i^{\dagger} &= cI, \quad 1 \leq i \leq L_b \\
 A_i A_j^{\dagger} + A_j A_i^{\dagger} &= 0, \quad 1 \leq i < j \leq L_b
 \end{aligned}$$

여기서 c 는 homogeneous OSTBC의 형태에 의해 결정되는 상수이다. BPSK나 QPSK가 사용될 때 homogeneous OSTBC는 BLLD 부호가 되고 정리 2의 식 (12a)와 (12b)를 만족시킨다. 따라서 BPSK나 QPSK를 사용하는 homogeneous OSTBC는 정리 2에서의 부등식 (13a), (13b), 그리고 (13c)를 모두 만족시킨다. 그림 3은 QPSK 변조를 사용한 Alamouti 부호 [8]에 대한 식 (13a)의 세 가지 항을 보였는데 이는 식 (13a)의 부등식을 만족하고 또한 하한과 상한이 각각 낮은 SNR과 높은 SNR영역에서 상당히 타이트함을 알 수 있다.

IV. 결론

이 논문에서는, 임의의 부호화와 변조 기법에 대한 MIMO 통신시스템에 대한 bit MMSE를 정의하고 BEP와 bit MMSE 사이의 관계를 유도하였다. 그래서 BEP와 bit MMSE중에서 하나를 알면 다른 하나의 하한과 상한을 쉽게 구한다. 이 결과를 이용하여 BLLD 부호를 사용한 MIMO 시스템에서 그것의 확산 행렬이 특정한 조건을 만족할 때, mutual information의 미분 값의 하한과 상한을 BEP에 관하여 나타내고 이로부터 mutual information의 하한과 상한을 쉽게 얻는다.

참 고 문 헌

- [1] N. Chayat and S. Shamai, Bounds on the capacity of intertransition-time-restricted binary signaling over an AWGN channel, IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 45, no. 6, pp. 1992-2006, Sep. 1999.
- [2] E. Telatar, Capacity of multi-antenna Gaussian channels, AT&T Bell Labs Tech. Rep., Jun. 1995.
- [3] G. J. Foschini and M. J. Gans, On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas, Wireless Personal Communications, vol. 6, pp. 311-335, Mar. 1998.
- [4] D. Guo, S. Shamai (shitz), and S. Verdú, Mutual information and minimum mean-square error in Gaussian channels, IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 51, no. 4, pp. 1261-1282, Apr. 2005.
- [5] Y. Jiang, R. Koetter, and A. C. Singer, On the separability of demodulation and decoding for communication over multiple-antenna block fading channels, IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 49, no. 10, pp. 2709-2712, Oct. 2003.
- [6] S.-H. Kim, I.-S. Kang, and J.-S. No, Exact bit error probability of orthogonal sapce-time block codes with quadrature amplitude modulation, in Proc. ISIT2003, p. 63, 2003.
- [7] X. B. Liang, Orthogonal designs with maximal rates, IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 49, no. 10, pp. 2468-2503, Oct. 2003.
- [8] S. M. Alamouti, A simple transmit diversity technique for wireless communications, IEEE J. Select. Areas Commun., vol. 16, no. 8, pp. 1451-1458, Oct. 1998.

김 향 란 (Xianglan Jin)

정회원



1999년 8월 북경우전대학교 통신공학부 공학사
 2002년 4월 북경우전대학교 통신공학부 석사
 2002년 4월~2004년 6월 북경삼성통신연구소 연구원
 2004년 9월~현재 서울대학교 전기

기컴퓨터공학부 박사과정
 <관심분야> 시공간부호, 정보이론

양 재 동 (Jaе-Dong Yang)

정회원



2002년 8월 서울대학교 전기공학부 공학사
 2003년 3월~현재 서울대학교 전기컴퓨터공학부 석·박사통합과정
 <관심분야> 시공간부호, 오류정정부호, 디지털통신

송 경 영 (Kyoung-Young Song)

정회원



2004년 2월 고려대학교 전기전자전파공학부 공학사
 2004년 3월~현재 서울대학교 전기컴퓨터공학부 석·박사통합과정
 <관심분야> 시공간부호, 오류정정부호, 이동통신

노 종 선 (Jong-Seon No)

종신회원



1981년 2월 서울대학교 전자공학과 공학사
 1984년 2월 서울대학교 대학원 전자공학과 석사
 1988년 5월 University of Southern California, 전기공학과 공학박사
 1988년 2월~1990년 7월 Hughes

Network Systems, Senior MTS

1990년 9월~1999년 7월 건국대학교 전자공학과 부교수
 1999년 8월~현재 서울대학교 전기컴퓨터공학부 교수
 <관심분야> 시퀀스, 시공간부호, LDPC 부호, OFDM, 이동통신, 암호학

신 동 준 (Dong-Joon Shin)

종신회원



1990년 2월 서울대학교 전자공학과 공학사
 1991년 12월 Northwestern University, 전기공학과 공학석사
 1998년 2월 University of outhern California 전기공학과 공학박사
 1999년 1월~1999년 4월 Research

Associate (USC)

1999년 4월~2000년 8월 Hughes Network Systems, MTS
 2000년 9월~현재 한양대학교 전자통신컴퓨터공학부 부교수
 <관심분야> 디지털통신, 이산수학, 시퀀스, 오류정정부호, 암호학